Révision des équivalents
(Maths 3, 2019)

Soit I un intervalle, soit $x_0 \in I$ et soit f une fonction définie au moins sur $I \setminus \{x_0\}$. L'idée des équivalents est de trouver une fonction g définie au voisinage de x_0, sauf peut-être en x_0, qui soit "plus simple" et "équivalente" à f, quand x tend vers x_0.

L'idée naturelle est de comparer le rapport $f(x)/g(x)$ au voisinage de x_0. Dans le cas où g ne s'annule pas au voisinage de x_0, on dit que "f est équivalente à g" au voisinage de x_0 et on écrit $f \underset{x_0}{\sim} g$ si $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Pour inclure les fonctions qui peuvent s'annuler au voisinage de x_0, on dit que f est équivalente à g au voisinage de x_0, on écrit $f \underset{x_0}{\sim} g$, s'il existe h définie au voisinage de x_0, sauf peut-être en x_0, telle que $f(x) = g(x) \cdot h(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} h(x) = 1$.

<u>Exemple:</u> On a

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0} = \sin'(0) = \cos(0) = 1.$$

Donc $\sin(x) \underset{0}{\sim} x$.

Plusieurs équivalents peuvent être obtenus par cette méthode. En effet, si f est dérivable en x_0 et si $f'(x_0) \neq 0$, alors $f(x)-f(x_0) \underset{x_0}{\sim} f'(x_0)(x-x_0)$

En effet

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{f'(x_0)(x-x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)} \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{f'(x_0)}{f'(x_0)} = 1.$$

<u>Exemple:</u> On a

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{e^x-1}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{e^x-1}{x-0} = (e^x)'\Big|_{x=0} = e^0 = 1.$$

Donc $e^x - 1 \sim_0 x$.

D'une façon similaire, on définit les équivalents en $+\infty$ ou en $-\infty$. On dit que $f \sim_{+\infty} g$, s'il existe une fonction h telle que $f(x) = g(x)\,h(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 1$.

De la même manière également, pour les suites, on dit que deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont équivalentes (au voisinage de $+\infty$), on écrit $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$, s'il existe une suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_n = v_n \cdot w_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 1$. De même que ici, si $v_n \neq 0, \forall n$, $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ ssi $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$.

<u>Exemple:</u> On sait que $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$. Si on veut trouver un équivalent de la suite $u_n = e^{\frac{1}{n}} - 1$, alors comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, on peut utiliser l'équivalent $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$ et déduire $e^{\frac{1}{n}} - 1 \underset{0}{\sim} \frac{1}{n}$.

Pour obtenir des nouveaux équivalents, on peut appliquer certaines opérations. Mais attention, pas toutes les opérations sont autorisées.

<u>Opérations autorisées:</u>

(1) Produit : $f \underset{x_0}{\sim} g$ et $h \underset{x_0}{\sim} k$

alors $f \cdot h \underset{x_0}{\sim} g \cdot k$.

(Même résultat en $\pm\infty$ et pour les suites)

(2) Quotient : $f \underset{x_0}{\sim} g$ et $h \underset{x_0}{\sim} k$

alors $\dfrac{f}{h} \underset{x_0}{\sim} \dfrac{g}{k}$

avec évidemment la précaution $h(x) \neq 0$ et $k(x) \neq 0$.

(Également, on a la même résultat en $\pm\infty$ et pour les suites).

(3) "Composition interne" : si $f \underset{b}{\sim} g$ et si $\lim\limits_{x \to a} h(x) = b$, alors $f \circ h \underset{a}{\sim} g \circ h$.

(4) Puissance par constante : si $f \underset{a}{\sim} g$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ alors $f^\alpha \underset{a}{\sim} g^\alpha$; avec évidemment la précaution que f^α et g^α soient bien définies.

<u>Exemples:</u>

(1) $\sin x \underset{0}{\sim} x$ et $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$ alors par produit:

$$\sin(x) \cdot (e^x - 1) \underset{0}{\sim} x^2$$

(2) $\sin(x) \underset{0}{\sim} x$ et $x^2 \underset{0}{\sim} x^2$ alors par quotient

$$\frac{\sin(x)}{x^2} \underset{0}{\sim} \frac{1}{x}.$$

(3) $\sin(\frac{1}{n}) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ alors $n^2 \sin(\frac{1}{n}) \sim n^2 \frac{1}{n} = n$ par produit.

(4) $\sin(x) \underset{0}{\sim} x$ et $\lim\limits_{x \to 0} (\ln(1+x)) = 0$ alors par composition $\sin(\ln(1+x)) \underset{0}{\sim} \ln(1+x)$.

(5) $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$ et $\lim\limits_{x \to 0} (\cos(x)-1) = 0$, par composition

$$\ln(\cos(x)) = \ln(1 + (\cos(x)-1)) \underset{0}{\sim} \cos(x) - 1 .$$

(6) $\sin(x) \underset{0}{\sim} x$ alors par puissance par une constante $\sqrt{\sin(x)} \underset{0}{\sim} \sqrt{x}$.

Remarques:

(1) L'équivalence est transitive : si $f \underset{x_0}{\sim} g$ et $g \underset{x_0}{\sim} h$ alors $f \underset{x_0}{\sim} h$.

(2) Si $f \underset{x_0}{\sim} g$ et $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$, alors $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} g(x) = \ell$

Opérations non autorisées:

Malheureusement, sans hypothèses supplémentaires, beaucoup d'opérations ne fonctionnent pas :

(1) Addition ou différence : si $f \underset{x_0}{\sim} g$ et $h \underset{x_0}{\sim} k$, alors cela n'implique pas $f + h \underset{x_0}{\sim} g + k$.

(2) Composition "externe" : si $f \underset{x_0}{\sim} g$, alors cela n'implique pas que $h \circ f \underset{x_0}{\sim} h \circ g$. En particulier $f \underset{x_0}{\sim} g \not\Rightarrow \ln(f) \underset{x_0}{\sim} \ln(g)$.

(3) puissance non constante, ---,

Pour ce genre d'opération, l'unique méthode est de se ramener à la définition et d'étudier

$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x)}{g(x)}$ (ou $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n}$) si cela est possible.

Exemple: On veut montrer que

$$\ln(\sin(x)) \underset{0}{\sim} \ln(x) .$$

Malheureusement, on ne peut pas appliquer la composition par le logarithme, on doit utiliser la définition. On a (pour $x>0$) :

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \left(\frac{\ln(\sin(x))}{\ln(x)} - 1 \right) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{\ln(\sin(x)) - \ln(x)}{\ln(x)}$$

$$= \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \left(\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) \cdot \frac{1}{\ln(x)} \right) = 0 \cdot 0 = 0 \quad \text{car}$$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{\ln(x)} = 0$.

Remarque: On peut conclure que si $f \underset{x_0}{\sim} g$ et $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \ln(g(x)) = \pm\infty$; alors $\ln(f) \underset{x_0}{\sim} \ln(g)$.

(Évidemment avec la précaution $f>0$, $g>0$).

Équivalents usuels à connaître absolument:

$\sin(x) \underset{0}{\sim} x$ $\qquad$ $1 - \cos(x) \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}$

$\tan(x) \underset{0}{\sim} x$ $\qquad$ $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$

$e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$ $\qquad$ $(1+x)^\alpha \underset{0}{\sim} 1 + \alpha x$.

Exercice 1: Déterminer un équivalent simple en 0 des fonctions:

(1) $\sin(x)\cos(x)$; (2) $\frac{x^2}{\sqrt{1+x}}$; (3) $\ln(\cos(x))$

Corrigé :

(1) Comme $\sin(x) \underset{0}{\sim} x$ et $\cos(x) \underset{0}{\sim} 1$ on déduit par produit que $\sin(x)\cos(x) \underset{0}{\sim} x$.

(2) Comme $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{1+x} = 1$, alors $\frac{x^2}{\sqrt{1+x}} \underset{0}{\sim} x^2$. On peut également utiliser $\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} \underset{0}{\sim} 1 + \frac{1}{2}x$ et on obtient $\frac{x^2}{\sqrt{1+x}} \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{1+\frac{1}{2}x}$ par quotient.

(3) On a $\lim\limits_{x \to 0} \cos(x) = 1$. Alors

$$\ln(\cos(x)) = \ln(1 + (\cos(x) - 1))$$

et donc $\ln(\cos(x)) \underset{0}{\sim} \cos(x) - 1 \underset{0}{\sim} \frac{-x^2}{2}$.

Donc $\ln(\cos(x)) \underset{0}{\sim} \frac{-x^2}{2}$.

Exercice 2 : Déterminer un équivalent simple (quand $n \to +\infty$) aux suites :

(1) $u_n = \dfrac{(n+1)^2}{3^n \sin(\frac{1}{n})}$; (2) $u_n = \dfrac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\sqrt{n^5+1}}$.

Corrigé :

(1) On a $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 = n^2\left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$ et donc $(n+1)^2 \underset{+\infty}{\sim} n^2$. On également $\sin\left(\frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ et donc

$$\frac{(n+1)^2}{3^n \sin(\frac{1}{n})} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^2}{\frac{1}{n} \cdot 3^n} = \frac{n^3}{3^n}.$$

(2) Comme $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ et

$\sqrt{n^5+1} = \sqrt{n^5}\sqrt{1+\frac{1}{n^5}} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{n^5} = n^{5/2}$; on a

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\frac{1}{n}}{n^{5/2}} = \frac{1}{n^{5/2+1}} = \frac{1}{n^{7/2}}.$$