Révision générale (corrigé)

Exercice 1. En utilisant les développements limités au voisinage de 0, montrer les équivalences suivantes :

$$(1)\quad \sin(x) \sim_0 x, \quad (2)\quad \ln(1+x) \sim_0 x,$$

$$(3)\quad \cos(x) - 1 \sim_0 \frac{-x^2}{2}, \quad (4)\quad e^x - 1 - x \sim_0 \frac{x^2}{2}.$$

Corrigé.

(1) Comme $\sin(x)$ est de classe C^∞, d'après la formule de Taylor, $\sin(x)$ admet un DL d'ordre 1 en 0, qui est (après calcul),

$$\sin(x) = x + o(x)$$

où $o(x) = x\epsilon(x)$ avec $\lim_{x\to 0} \epsilon(x) = 0$. D'où $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0}(1 + \epsilon(x)) = 1$.

(2) De même ici, $\ln(1+x)$ admet un DL d'ordre 1 en 0

$$\ln(1+x) = x + o(x)$$

et on déduit comme précédemment que $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}(1 + \epsilon(x)) = 1$.

(3) La fonction $\cos(x)$ admet un DL d'ordre 2 en 0 donné par

$$\cos(x) = 1 - x^2/2 + o(x^2)$$

où donc $o(x) = x^2\epsilon(x)$ avec $\lim_{x\to 0} \epsilon(x) = 0$. D'où $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - 1}{-x^2/2} = \lim_{x\to 0}(1 - 2\epsilon(x)) = 1$.

(4) Se traite de la même façon.

Remarque. D'une façon générale, si f admet un DL (non nul) d'ordre n en x_0

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)$$

alors

$$f(x) \sim_{x_0} a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n.$$

Exercice 2. Trouver un équivalent simple aux suites suivantes (quand n tend vers $+\infty$) :

$$(1)\quad u_n = \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n-3}, \quad (2)\quad u_n = \sin\Big(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}\Big), \quad (3)\quad u_n = \sqrt{n-2} - \sqrt{n+1},$$

$$(4)\quad u_n = \ln\Big(\cos(\frac{1}{\sqrt{n^3+1}})\Big), \quad (5)\quad u_n = (1 + \frac{1}{n})^n.$$

Corrigé.

(1) En mettant sous le même dénominateur, on a

$$u_n = \frac{-5}{(n+2)(n-3)} \sim_{+\infty} \frac{-5}{n^2}.$$

(2) Comme $\sin(x) \sim_0 x$ et comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} = 0$, on a

$$\sin(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}) \sim_{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$$

et comme $\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} \sim_{+\infty} \dfrac{1}{n}$ on conclut

$$\sin(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}) \sim_{+\infty} \frac{1}{n}.$$

(3) En multipliant par la quantité conjuguée on obtient

$$u_n = \frac{-3}{\sqrt{n}\big(\sqrt{1-\frac{2}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}\big)} \sim_{+\infty} \frac{-3}{2\sqrt{n}}.$$

(4) Comme $\ln(1+x) \sim_0 x$ et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} (\cos(\dfrac{1}{\sqrt{n^3+1}})-1) = 0$ on a

$$\ln(\cos(\frac{1}{\sqrt{n^3+1}})) = \ln\big(1+(\cos(\frac{1}{\sqrt{n^3+1}})-1)\big) \sim_{+\infty} (\cos(\frac{1}{\sqrt{n^3+1}})-1)$$

et comme

$$\cos(\frac{1}{\sqrt{n^3+1}})-1 \sim_{+\infty} \frac{-1}{2(\sqrt{n^3+1})^2}$$

on conclut

$$u_n \sim_{+\infty} \frac{-1}{2n^3}.$$

(5) On a

$$(1+\frac{1}{n})^n = \exp\big(n\ln(1+\frac{1}{n})\big)$$

et comme $\ln(1+\frac{1}{n}) \sim_{+\infty} \frac{1}{n}$ et donc $\lim_{n\to+\infty} n\ln(1+\frac{1}{n}) = 1$, on conclut

$$\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^n = \lim_{n\to+\infty}\exp\big(n\ln(1+\frac{1}{n})\big) = e$$

et donc

$$u_n \sim_{+\infty} 1.$$

Exercice 3. (Exercice 7, Fiche 6) Étudier la nature des séries $\sum u_n$ de termes généraux :

$$(1)\ u_n = \frac{1}{n(n+1)}, \quad (2)\ u_n = \frac{2n-1}{n(n^2-4)}, \quad (3)\ u_n = (-1)^n\ln(\frac{n+1}{n-1}), \quad (4)\ u_n = \frac{1}{3^n\mathrm{ch}n},$$

$$(5)\ u_n = \frac{\ln n}{n}, \quad (6)\ u_n = \frac{\ln n}{n2^n}, \quad (7)\ u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+n}}, \quad (8)\ u_n = (1+\sqrt{n})^{-n},$$

$$(9)\ u_n = \frac{1}{4^n\ln(2+\frac{1}{n})}, \quad (10)\ u_n = \frac{1}{4^n\ln(1+\frac{1}{n})}.$$

Corrigé.

(1) $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}, n \geq 1$. On a

$$u_n = \frac{1}{n^2+n} = \frac{1}{n^2(1+\frac{1}{n})} \sim_{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Comme $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ et $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^2}$ sont à termes positifs, comme la série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente, d'après le critère des équivalents, la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ est convergente.

(2) $u_n = \dfrac{2n-1}{n(n^2-4)}$, $n \geq 3$. De même ici, on a :

$$u_n = \frac{2n(1-\frac{1}{2n})}{n^3(1-\frac{4}{n^2}} \sim_{+\infty} \frac{2n}{n^3} = \frac{2}{n^2}.$$

De même ici, comme $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ et $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{2}{n^2}$ sont à termes positifs, comme la série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente, d'après le critère des équivalents, la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ est convergente.

(3) $u_n = (-1)^n \ln(\dfrac{n+1}{n-1})$, $n \geq 2$. On a, pour tout $n \geq 2$

$$\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right) = \ln\left(\frac{n-1+2}{n-1}\right) = \ln\left(1+\frac{2}{n-1}\right) \geq 0$$

et donc $|u_n| = \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)$ et $u_n = (-1)^n|u_n|$. La série est donc une série alternée. Comme :

— $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = \lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(1+\dfrac{2}{n-1}\right) = 0$,

— la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante pour tout $n \geq 2$:

$$n-1 \leq n \Rightarrow \frac{2}{n} \leq \frac{2}{n-1} \Rightarrow 1+\frac{2}{n} \leq 1+\frac{2}{n-1} \Rightarrow \ln\left(1+\frac{2}{n}\right) \leq \ln\left(1+\frac{2}{n-1}\right)$$

et donc $|u_{n+1}| \leq |u_n|$,

d'après le critère des séries alternées, $\sum_{n\geq 2} u_n$ est convergente.

Complément : On voit que cette série n'est pas absolument convergente ! En effet, on a $\ln\left(1+\frac{2}{n-1}\right) \sim \frac{2}{n-1}$ et $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n-1}$ est une série divergente (la série harmonique).

(4) $u_n = \dfrac{1}{3^n \mathrm{ch} n}, n \geq 0$. Ici, on peut utiliser le critère de D'Alembert :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3^n ch(n)}{3^{n+1}ch(n+1)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3} \times \frac{1+e^{-2n}}{e+e^{-2n+1}} = \frac{1}{3e} < 1.$$

Donc la série est convergente.

(5) $u_n = \dfrac{\ln n}{n}, n \geq 1$. Pour tout $n \geq 3$ et donc $n \geq e$, on a

$$\ln(n) \geq \ln(e) = 1 \text{ et donc } \frac{\ln(n)}{n} \geq \frac{1}{n}.$$

Comme la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ est une série divergente, par le critère de comparaison la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ est divergente.

(6) $u_n = \dfrac{\ln n}{n2^n}, n \geq 1$. Pour tout $n \geq 1$,

$$\ln(n) \leq n \text{ et donc } \frac{\ln(n)}{n} \leq \frac{1}{2^n}.$$

Comme $\sum_{n\geq 1} u_n$ et $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{2^n}$ sont à termes positifs et comme la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{2^n}$ est une série géométrique convergente, par le critère de comparaison, la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ est convergente.

Complément : On aurait pu aussi utiliser le critère de D'Alembert :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1}\times\frac{2^n}{2^{n+1}}\times\frac{\ln(n)}{\ln(n+1)} = \frac{1}{2} < 1$$

et donc la série est convergente.

(7) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+n}}, n \geq 1$. La série est alternée avec $|u_n| = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}$. Comme $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et tend vers 0, d'après le critère des séries alternées, $\sum_{n\geq 1} u_n$ est convergente. On remarque ici que $|u_n| \sim \frac{1}{n}$ et donc la série n'est pas absolument convergente.

(8) $u_n = (1+\sqrt{n})^{-n}, n \geq 0$. La série est à termes positifs et on a :

$$u_n = \Big(\frac{1}{1+\sqrt{n}}\Big)^n = \Big(\frac{1}{\sqrt{n}(1+\frac{1}{\sqrt{n}})}\Big)^n \sim (\frac{1}{\sqrt{n}})^n.$$

En utilisant le critère de Cauchy, la série $\sum_{n\geq 1}(\frac{1}{\sqrt{n}})^n$ est convergente. Par le critère des équivalents, la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente.

(9) $u_n = \dfrac{1}{4^n\ln(2+\frac{1}{n})}, n \geq 1$. La série est à termes positifs et

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{4^n\ln(2)}{4^n\ln(2+\frac{1}{n})} = 1.$$

Donc $u_n \sim \frac{1}{4^n\ln(2)}$. Comme la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{4^n\ln(2)}$ est convergente (série géométrique de raison < 1), la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ est convergente.

(10) $u_n = \dfrac{1}{4^n\ln(1+\frac{1}{n})}, n \geq 1$. Comme $\ln(1+\frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n}$, on a $u_n \sim \frac{n}{4^n}$. En utilisant le critère de D'Alembert, la série $\sum_{n\geq 1}\frac{n}{4^n}$ est convergente et en utilisant le critère des équivalents, on déduit la convergence de la série $\sum_{n\geq 1} u_n$.

Exercice 4. (Exercice 15, Fiche 7) Déterminer le rayon de convergence des séries entières à variables complexes suivantes :

$$(1)\ \sum\frac{(2n)!}{(n!)^2}z^n, \qquad (2)\ \sum(1+\frac{1}{n})^{n^2}z^n, \qquad (3)\ \sum\frac{\ln(n)}{\ln(n+1)}z^n, \qquad (4)\ \sum(-1)^n\frac{n^n}{n!}z^{4n+1}.$$

Corrigé.

(1) On utilise le critère de D'Alembert

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(2(n+1))!}{(n+1)!^2} \times \frac{n!^2}{(2n)!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(n+1)^2 n!^2} \times \frac{n!^2}{(2n)!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = 4$$

et donc le rayon de convergence est $R = \frac{1}{4}$.

(2) En utilisant le critère de Cauchy on obtient $R = \frac{1}{e}$.

(3) En utilisant le critère de D'Alembert on obtient $R = 1$.

(4) Calculons le rayon de convergence de la série

$$\sum (-1)^n \frac{n^n}{n!} z^n.$$

En utilisant le critère de D'Almbert on obtient $R = \frac{1}{e}$. On a

$$\sum (-1)^n \frac{n^n}{n!} z^{4n+1} = z \sum (-1)^n \frac{n^n}{n!} (z^4)^n$$

et donc la série est convergente ssi $|z^4| < \frac{1}{e}$ ssi $|z| < (\frac{1}{e})^{\frac{1}{4}}$. Donc le rayon de convergence est $(\frac{1}{e})^{\frac{1}{4}}$.

Exercice 5. (Exercice 16, Fiche 7) Calculer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$(1) \ \sum \frac{n^3+1}{3^n} x^n, \qquad (2) \ \sum \frac{\ln n}{n^3} x^n, \qquad (3) \ \sum \frac{\ln(n^n)}{(\ln n)^n} x^n, \qquad (4) \ \sum \sin^3(\frac{1}{n}) x^n.$$

Corrigé.

(1) En utilisant le critère de D'Alembert, on a $R = 1/3$.

(2) En utilisant le critère de D'Alembert, on a $R = 1$.

(4) En utilisant le critère de Cauchy, on a $R = +\infty$.

(3) En utilisant le critère de D'Alembert et les équivalents, on a $R = 1$.

Exercice 6. (Exercice 19, Fiche 7) Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin(\frac{1}{\sqrt{n}}) x^n.$$

1. Déterminer le rayon de convergence R de cette série entière.
2. Étudier la convergence en $-R$ et en R.

Corrigé.

1. On a $\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$. La série entière de terme générale $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ a comme rayon de convergence 1 en utilisant le critère de D'Alembert

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{n}{n+1}} = 1.$$

Donc la série entière $\sum_{n\geq 1}\sin(\frac{1}{\sqrt{n}})x^n$ a comme rayon de convergence $R=1$.

2. Pour $x=1$, on obtient la série $\sum_{n\geq 1}\sin(\frac{1}{\sqrt{n}})$. Comme $\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\sim\frac{1}{\sqrt{n}}$ et comme la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{\sqrt{n}}$ est une série de Riemann divergente, par le critère des équivalents, la série $\sum_{n\geq 1}\sin(\frac{1}{\sqrt{n}})$ est divergente.

Pour $x=-1$, on obtient la série $\sum_{n\geq 1}(-1)^n\sin(\frac{1}{\sqrt{n}})$. C'est une série alternée avec $(\sin(\frac{1}{\sqrt{n}}))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante qui tend vers 0. D'après le critère des séries alternées, la série $\sum_{n\geq 1}(-1)^n\sin(\frac{1}{\sqrt{n}})$ est convergente.

Exercice 7. (Exercice 5, Fiche 8) On considère l'équation différentielle

$$(E)\qquad y''-xy'-y=0$$

avec la condition initiale

$$(CE)\qquad y(0)=1,\ \ y'(0)=0.$$

On suppose que (E) admet une solution développable en série entière au voisinage de 0, $y(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$, de rayon de convergence $R>0$ et vérifiant la condition initiale (CE).

1. Calculer a_0 et a_1.
2. Montrer que a_n vérifie la relation de récurrence
$$a_n=\frac{1}{n}a_{n-2},\ \text{pour tout } n\geq 2.$$
3. Déterminer l'expression de a_{2k} et montrer que $a_{2k+1}=0$ pour tout $k\in\mathbb{N}$.
4. Donner l'expression de la série entière obtenue et calculer son rayon de convergence.

Corrigé.

1. D'après la formule de Taylor-Maclaurin,

$$a_0=\frac{y(0)}{0!}=y(0)=1,\ a_1=\frac{y'(0)}{1!}=y'(0)=0.$$

2. On a

$$y'(x)=\sum_{n\geq 1}na_nx^{n-1},\ xy'(x)=\sum_{n\geq 1}na_nx^n,$$

et

$$y''(x)=\sum_{n\geq 2}n(n-1)a_nx^{n-2}.$$

En remplaçant dans (E),

$$\begin{aligned}y''(x)-xy'(x)-y(x)&=\sum_{n\geq 2}n(n-1)a_nx^{n-2}-\sum_{n\geq 1}na_nx^n-\sum_{n\geq 0}a_nx^n\\&=\sum_{n\geq 0}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n-\sum_{n\geq 1}(n+1)a_nx^n-a_0\\&=(2a_2-a_0)+\sum_{n\geq 1}(n+1)((n+2)a_{n+2}-a_n)x^n.\end{aligned}$$

D'où

$$a_2=\frac{1}{2}a_0,\ a_{n+2}=\frac{1}{n+2}a_n\ \text{pour tout } n\geq 1,$$

ce qu'on peut réécrire

$$a_n = \frac{1}{n} a_{n-2}, \text{ pour tout } n \geq 2.$$

3. Par récurrence sur n,

$$a_{2k} = \frac{1}{2k} a_{2(k-1)} = \frac{1}{(2k)(2(k-1))} a_{2(k-2)}$$

et donc

$$a_{2k} = \frac{1}{(2k)(2(k-1))\cdots 2} a_0 = \frac{1}{2^k k!}.$$

De même

$$a_{2k+1} = \frac{1}{2k+1} a_{2k-1} = \frac{1}{(2k+1)(2k-1)} a_{2k-3}$$

$$= \frac{1}{(2k+1)(2k-1)(2k-3)\cdots 1} a_1 = 0,$$

car $a_1 = 0$.

4. La série obtenue est

$$y(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^n n!} x^{2n}.$$

Calculons le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n n!} x^n$. Par la règle de D'Alembert

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{2^n n!}{2^{n+1}(n+1)!} = 0$$

et donc le rayon de convergence est $+\infty$. Il est en de même pour la série $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n n!} x^{2n}$.