Fiche 6 - Suites et séries numériques

Exercice 1. Déterminer si les suites suivantes sont convergentes ou non. Dans le cas où elles convergent donnez la limite :

$$(1)\ u_n = \frac{(-1)^n}{3^n}, \qquad (2)\ u_n = \frac{n^2}{e^n}, \qquad (3)\ u_n = \frac{\sin(n)}{n^2}, \qquad (4)\ u_n = n^2 \sin(\frac{1}{3^n}),$$

$$(5)\ u_n = n(1-\cos\frac{1}{n}), \qquad (6)\ u_n = \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}, \quad a, b \text{ strictement positifs.}$$

Exercice 2. À l'aide du critère de d'Alembert ou du critère de Cauchy, déterminer la nature des séries de termes généraux :

$$(1)\ u_n = \frac{n!}{n^n}, \qquad (2)\ u_n = (\frac{\sin^2 n}{n})^n, \qquad (3)\ u_n = \frac{2^n}{n!}, \qquad (4)\ u_n = (\pi + \frac{1}{n})^n.$$

Exercice 3. Déterminer la nature (convergence absolue, convergence, semi-convergence, divergence et divergence grossière) des séries $\sum u_n$ de termes généraux :

$$(1)\ u_n = q^n \text{ où } q > 0, \qquad (2)\ u_n = n^{\alpha+1} \text{ où } \alpha \in \mathbb{R}, \qquad (3)\ u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}, \qquad (4)\ u_n = \ln(1 - \frac{1}{(n+2)^2})$$

$$(5)\ u_n = \frac{(-1)^n}{n\ln(n)}, \qquad (6)\ u_n = \frac{(-1)^n}{n(\ln n)^2}, \qquad (7)\ u_n = \int_0^{1/n^2} \sin(t)\,dt, \qquad (8)\ u_n = e^n - 1 - \frac{1}{n}.$$

Exercice 4. Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ la série

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha(n-1)}$$

est-elle convergente ? Calculer sa somme lorsque $\alpha = 1$.

Exercices supplémentaires

Exercice 5. Étudier les suites $(u_n)_n$ dont le terme général est donné par

$$(1)\ u_n = \frac{1}{2^n}, \qquad (2)\ u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}, \qquad (3)\ u_n = n^{1/n}, \qquad (4)\ u_n = \frac{2^n}{n^2},$$

$$(5)\ u_n = (1 + \frac{2}{n})^n, \qquad (6)\ u_n = n\sin(\frac{2}{n}), \qquad (7)\ u_n = \sqrt[n]{n+1}, \qquad (8)\ u_n = (1 - \frac{1}{n})^n.$$

Exercice 6. Considérons les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = u_n + \frac{1}{n(n!)}.$$

1. Montrer que (u_n) est strictement croissante et que (v_n) est strictement décroissante.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n < v_n$.
3. Montrer que (u_n) est convergente vers e.

4. Montrer que (v_n) converge vers e.
5. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists! \theta_n, 0 < \theta_n < 1 \text{ et } e = u_n + \frac{\theta_n}{n(n!)}.$$
6. Donner une valeur approchée par défaut de e à 10^{-4} près.
7. Montrer que $e \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

Exercice 7. Étudier la nature des séries $\sum u_n$ de de termes généraux :

$$(1)\ u_n = \frac{1}{n(n+1)}, \qquad (2)\ u_n = \frac{2n-1}{n(n^2-4)}, \qquad (3)\ u_n = (-1)^n \ln(\frac{n+1}{n-1}), \qquad (4)\ u_n = \frac{1}{3^n \mathrm{ch} n},$$
$$(5)\ u_n = \frac{\ln n}{n}, \qquad (6)\ u_n = \frac{\ln n}{n 2^n}, \qquad (7)\ u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+n}}, \qquad (8)\ u_n = (1+\sqrt{n})^{-n},$$
$$(9)\ u_n = \frac{1}{4^n \ln(2+\frac{1}{n})}, \qquad (10)\ u_n = \frac{1}{4^n \ln(1+\frac{1}{n})}.$$

Exercice 8. Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ la série
$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n^2-4)^\alpha}$$
est-elle convergente ? Calculer sa somme lorsque $\alpha = 1$.

Exercice 9. Étudier la convergence de la série numérique de terme général donné pour tout $n \geq 1$ par
$$u_n = \frac{\sqrt{n} + \sin(n)}{\ln(n+1) + n^3}.$$

Exercice 10. Montrer que la série numérique suivante est convergente et calculer sa somme :
$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+2)}.$$

Exercice 11. Calculer une valeur approchée à 10^{-2} de la série $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$.

Exercice 12. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une application continue. On considère la série numérique $\sum_{n \geq 0} u_n$ de terme général $u_n = (-1)^n \displaystyle\int_0^1 x^n f(x)\, dx$.

1. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$
$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k = \frac{1 + (-1)^n x^{n+1}}{1+x}.$$
2. On note $(S_n)_{n \geq 0}$ la suite des sommes partielles, $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$. Montrer que
$$S_n = \int_0^1 \frac{f(x)}{1+x}\, dx + \int_0^1 \frac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x} f(x)\, dx.$$
3. En déduire que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est convergente et que sa somme vaut $\int_0^1 \frac{f(x)}{1+x}\, dx$.
4. Montrer, en choisissant judicieusement f, que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln(2)$.

Exercice 13. On considère $\mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égale à 2. On pose $P_0(X) = 1$, $P_1(X) = X$, $P_2(X) = X(X-1)$ et $\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2)$.

1. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Soit $Q(X) = X^2 + X + 1$. Calculer les composantes de Q dans la base $\mathcal{B}$.
3. Monter que la série suivante est convergente et calculer sa somme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+n+1}{n!}.$$

Exercice 14. Écrire le nombre rationnel $1,037037...037...$ sous la forme $\dfrac{p}{q}$ où p et q sont des nombres entiers.

Exercice 15.

1. Donner la nature de la série $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} u_n$ de terme général $u_n = \dfrac{1}{n} + \ln(1 - \dfrac{1}{n})$.
2. Simplifier la somme partielle $S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} u_k$ et en déduire la convergence de la suite
$$\alpha_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} - \ln(n).$$
3. En déduire la somme de la série
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n + (-1)^{n+1}}.$$

Exercice 16. En exprimant $u_n = \dfrac{1 + (-1)^n n^\alpha}{n^{2\alpha}}$ comme somme de deux suites, déterminer selon les valeurs de α la nature de la série $\sum u_n$.