Fiche 1 - Espaces vectoriels, applications linéaires

Exercice 1. Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels ?

$$E_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x \leqslant y\}, \quad E_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x + 2y + z = 0\},$$
$$E_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}, \quad E_4 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x - y + z = 0\}.$$

Exercice 2.

1. Les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$ sont-ils linéairement indépendants dans $\mathbb{R}^3$? Sont-ils générateurs de $\mathbb{R}^3$? Forment-ils une base ?
2. Mêmes questions pour $\vec{u} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}$.
3. Mêmes questions pour $\vec{u} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}$, $\vec{r} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.

Exercice 3. Soit E l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions infiniment dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et ω un nombre réel non nul.

1. On définit $\vec{u} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $\vec{u}(x) = \cos(\omega x)$ et $\vec{v} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $\vec{v}(x) = \sin(\omega x)$. Montrer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs de E linéairement indépendants.
2. Soit F_ω le sous-espace vectoriel de E formé par les solutions de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$. On admet que $\dim(F_\omega) = 2$. Montrer que $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v})$ est une base de F_ω.
3. On définit $\vec{w} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $\vec{w}(x) = \cos(\omega x + a)$ et $\vec{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $\vec{v}(x) = \sin(\omega x + a)$ où a est un réel fixé. Écrire $\vec{w}$ et $\vec{r}$ dans la base $\mathcal{B}$ et montrer que $\mathcal{C} = (\vec{w}, \vec{r})$ est une base de F_ω.
4. Exprimer la fonction $\vec{u}$ dans la base $\mathcal{C}$.

Exercice 4. Dans $\mathbb{R}^2$, on considère les sous-ensembles

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = -x\} \text{ et } F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x\}.$$

Montrer que E et F sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ et que $E \oplus F = \mathbb{R}^2$.

Exercice 5. Soit f l'application de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ définie, pour tout $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$, par

$$f(x,y,z,t) = (x + y + z + t, y - t, x - 2z + 3t).$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer une base du noyau de f. Quelle est sa dimension ?
3. En déduire le rang de f.

Exercice 6. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$f(\vec{e}_1) = 13\vec{e}_1 + 12\vec{e}_2 + 6\vec{e}_3, \; f(\vec{e}_2) = -8\vec{e}_1 - 7\vec{e}_2 - 4\vec{e}_3, \; f(\vec{e}_3) = -12\vec{e}_1 - 12\vec{e}_2 - 5\vec{e}_3,$$

où $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Démontrer que $F_1 = \{\vec{u} \in \mathbb{R}^3 : f(\vec{u}) = \vec{u}\}$ et $F_2 = \{\vec{u} \in \mathbb{R}^3 : f(\vec{u}) = -\vec{u}\}$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ et déterminer la dimension de chacun d'eux.
2. Montrer que F_1 et F_2 sont supplémentaires.

Exercices supplémentaires

Exercice 7. Pour tous les cas suivants, indiquer si F est un sous-espace vectoriel de E :

a) $E = \mathbb{R}^2$, $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 2x + 3y = 0\}$
b) $E = \mathbb{R}^2$, $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y = 1\}$
c) $E = \mathbb{R}^2$, $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, xy = 0\}$
d) $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x = 0\}$
e) $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x + y - z = 0\}$
f) $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, y = 2x \text{ et } z = x\}$

Dans les cas où F est un sous-espace vectoriel de E, indiquer sa nature géométrique.

Exercice 8. Soit E l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des applications dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit F le sous-ensemble de E des applications f qui vérifient $f(0) = f'(0) = 0$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
2. Soit H l'ensemble des applications $x \mapsto ax + b$, oú $a, b \in \mathbb{R}$. Vérifier que H est un sous-espace vectoriel de E et montrer que $F \oplus H = E$.

Exercice 9.
1. Soient u et v deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ non colinéaires l'un à l'autre (c'est-à-dire tels que pour tout réel λ, on ait $u \neq \lambda v$ et $v \neq \lambda u$). Montrer que le sous-espace vectoriel engendré par u et v est égal à $\mathbb{R}^2$.
2. En déduire la description complète des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 10. Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs :

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{w}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{w}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que les familles $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ et $(\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3)$ sont libres.
2. Soit F le sous-espace vectoriel engendré par $\mathcal{V} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$. Déterminer une base de F.
3. Soit G le sous-espace vectoriel engendré par $\mathcal{W} = (\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3, \vec{w}_4)$. Déterminer une base de G.

Exercice 11. Parmi les applications suivantes, déterminer celles qui sont linéaires (avec $a \in \mathbb{R}$) :

a) $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (y, x) \end{array}$
b) $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (x, a) \end{array}$
c) $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (ax, ay) \end{array}$
d) $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (x + a, y + a) \end{array}$
e) $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x + z, y + z) \end{array}$
f) $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \longmapsto & (2x, 0, x - y) \end{array}$
g) $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin x \end{array}$

Exercice 12. On considère $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$f(\vec{e}_1) = \vec{e}_1\,, \quad f(\vec{e}_2) = -\vec{e}_1\,, \quad f(\vec{e}_3) = \vec{e}_3\,.$$

1. Déterminer l'image par f d'un élément $\vec{u} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$ de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer le noyau et l'image de f et donner une base de chacun d'eux.
3. Montrer que $f \circ f = f$.