## COURS 4

### V. 8. Application de la méthode de Gauss à l'inversion des matrices

Si $A$ est une matrice carrée inversible de type $(n, n)$ et $B$ est l'inverse de $A$, alors

$$AB = I_n$$

Si $B_1, \ldots, B_n$ sont les colonnes de $B$ , l'équation matricielle précédente est équivalente aux n équations

$$AB_i = \vec{e_i}, i = 1, ..., n.$$

Donc calculer $B$ revient à résoudre $n$ systèmes d'équations linéaires ayant la même matrice $A$.
Pour calculer la matrice inverse, on applique la méthode de Gauss pour résoudre les systèmes précédents parallèlement.

**Exemple.** Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On écrit alors le tableau

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

et on applique la méthode de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 5/3 & -1 & 1/3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 5/3 & -1 & 1/3 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3/5 & 1/5 & 3/5 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3/5 & 1/5 & 3/5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2/5 & 1/5 & -2/5 \\ 0 & 0 & 1 & -3/5 & 1/5 & 3/5 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2/5 & 1/5 & -2/5 \\ 0 & 0 & 1 & -3/5 & 1/5 & 3/5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/5 & -2/5 & 4/5 \\ 0 & 1 & 0 & 2/5 & 1/5 & -2/5 \\ 0 & 0 & 1 & -3/5 & 1/5 & 3/5 \end{array}\right)$$

Donc la matrice inverse est

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & -2/5 & 4/5 \\ 2/5 & 1/5 & -2/5 \\ -3/5 & 1/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

## V. 7. 1. Systèmes de Cramer

### Définition 1

On dit qu'un système de $n$ équations linéaires à $n$ inconnues est un système de Cramer si la matrice A de ce système est inversible.

### Proposition 1

Soit $(S)$ un système de $n$ équations linéaires à $n$ inconnues écrit sous forme matricielle $AX = B$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- Quel que soit $B$, le système $(S)$ admet une solution et une seule.
- Quel que soit $B$, le système $(S)$ admet au moins une solution.
- Quel que soit $B$, le système $(S)$ admet au plus une solution.
- Le système homogène associé au système $(S)$ n'admet que la solution triviale.
- La matrice $A$ du système $(S)$ est inversible.
- $det(A) \neq 0$.

La solution unique du système $(S)$ est alors $X = A^{-1}B$.

### Proposition (Règle de Cramer)

Soit $(S)$ un système de $n$ équations linéaires à $n$ inconnues écrit sous forme matricielle $AX = B$.

Pour chaque $1 \leq i \leq n$, soit $A_i$ la matrice obtenue en remplaçant la $i^{\text{ème}}$ colonne de $A$ par le second membre $B$.

Supposons que $(S)$ est de Cramer (donc $det(A) \neq 0$). Alors l'unique solution $(x_1, \ldots, x_n)$ de $(S)$ est donnée par

$$x_i = \frac{det(A_i)}{det(A)}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

### Exemple

Soit

$$(S) \quad \begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + 3y = 6 \end{cases}$$

écrit sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

On a $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$.

Donc $(S)$ est un système de Cramer et l'unique solution est

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{9}{1} = 9, \;\; y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{-4}{1} = -4.$$

## VI. Réduction des endomorphismes

### VI. 1. Introduction

**Rappel**

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

- Une application linéaire de $E$ dans $E$ est appelée un endomorphisme.
- L'espace vectoriel des endomorphismes est noté $End(E)$.

Soient $E$ un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie et $f \in End(E)$. On se fixe une base $\mathcal{B}$ de $E$.
On considère la matrice $M_{\mathcal{B}}(f)$ de $f$ par rapport à la base $\mathcal{B}$ : *on prend la même base pour $E$ comme ensemble de départ que pour $E$ comme ensemble d'arrivée.*
Si $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n)$ et les composantes de chaque $f(\vec{e}_j)$ dans la base $\mathcal{B}$ sont

$$f(\vec{e}_j) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

alors

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

**Exemple**

Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ définie par

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = (x + 2y, -x + 4y).$$

Considérons $\mathbb{R}^2$ muni de la base canonique $Can = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Alors

$$f(\vec{e}_1) = f(1, 0) = (1, -1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}_{Can},$$

$$f(\vec{e}_2) = (0, 1) = (2, 4) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}_{Can}.$$

Donc

$$M_{Can}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Si on considère maintenant $\mathbb{R}^2$ muni de la base $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v})$ où

$$\vec{u} = (2,1), \quad \vec{v} = (1,1)$$

alors

$$f(\vec{u}) = f(2,1) = (4,2) = 2\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

$$f(\vec{v}) = f(1,1) = (3,3) = 3\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

et donc

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

On voit que les deux matrices de $f$, par rapport aux différentes bases $Can$ et $\mathcal{B}$

$$M_{Can}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

sont très différentes.
La dernière matrice est plus simple.

La matrice associée à un endomorphisme $f$ dépend de la base choisie : pour deux bases $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$, les matrices $M_{\mathcal{B}_1}(f)$, $M_{\mathcal{B}_2}(f)$ ne sont pas forcément identiques.

L'objectif de la réduction d'un endomorphisme, c'est de trouver une base $\mathcal{B}$ dans laquelle $M_{\mathcal{B}}(f)$ soit la plus simple possible.

Les matrices les plus simples sont les matrices diagonales :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Elles sont simples : la somme, la multiplication, la puissance $n$-ème, ... etc, se ramène à des opérations simples.

## Exemple

Si

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_p \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \beta_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \beta_p \end{pmatrix}$$

alors

$$AB = \begin{pmatrix} \alpha_1\beta_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2\beta_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_p\beta_p \end{pmatrix}$$

Si

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_p \end{pmatrix}$$

alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$A^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_p^n \end{pmatrix}.$$

## VI.2. Définition, propriétés

### Définition 2

On dit d'un endomorphisme $f$ qu'il est diagonalisable, s'il existe une base $\mathcal{B}$ de $E$ telle que $M_{\mathcal{B}}(f)$ est diagonale :

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

### Exemple

Reprenons l'exemple précédent

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = (x+2y, -x+4y).$$

Alors, dans la base $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v})$ où

$$\vec{u} = (2,1), \quad \vec{v} = (1,1)$$

la matrice de $f$ est

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

et donc $f$ est diagonalisable.

Comment peut-on définir la diagonalisation d'une matrice ?

### Rappel

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors l'application linéaire associée à $A$ est définie par

$$f_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n, \quad f_A(x_1, \cdots, x_n) = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Remarquons que $A$ est la matrice de $f_A$ par rapport à la base canonique : $M_{Can}(f_A) = A$.

On définit maintenant la diagolnalisation d'une matrice en utilisant son application linéaire associée ...

### Définition 3

On dit d'une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qu'elle est diagonalisable, si l'application linéaire qui lui est associée est diagonalisable.

Rappelons que si $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{K}^n$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors

$$A = M_{Can}(f_A) = P_{Can,\mathcal{B}} \cdot M_{\mathcal{B}}(f_A) \cdot P_{\mathcal{B},Can}$$

et $P_{\mathcal{B},Can} = P^{-1}_{Can,\mathcal{B}}$.

Donc en particulier, si $A$ est diagonalisable, alors il existe une matrice diagonale $D$ et une matrice inversible $P$ telles que $A = PDP^{-1}$.
Inversement, supposons que $A = PDP^{-1}$ où $D$ est diagonale et $P$ est inversible.
Si on prend pour $\mathcal{B}$ la famille $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_n)$ où $\vec{u}_i$ est le $i$-ième vecteur colonne de la matrice $P$ ; comme $P$ est inversible, $det(P) \neq 0$, $\mathcal{B}$ est une famille libre et est donc une base de $\mathbb{K}^n$.
Donc en particulier, $P$ est la matrice de passage de $Can$ à $\mathcal{B}$ et $D$ est la matrice de $f_A$ dans la base $\mathcal{B}$.
Donc $A$ est diagonalisable.

### Définition 4

On dit que la matrice $A$ est semblable à $B$ s'il existe une matrice inversible $P$ telle que $A = PBP^{-1}$.

Donc on avait montré la proposition importante suivante :

### Proposition 2

Une matrice $A$ est diagonalisable si et seulement si elle est semblable à une matrice diagonale.

### Remarques (en pratique)

- Si $A$ est diagonalisable et si $\mathcal{B}$ est la base dans laquelle $A$ (ou l'application linéaire qui lui est associée) est représentée par une matrice diagonale $D$ alors

$$A = PDP^{-1}$$

  où $P = P_{Can,\mathcal{B}}$ est la matrice de passage de la base canonique Can à $\mathcal{B}$.
- Diagonaliser une matrice carrée $A$ revient à trouver une matrice diagonale $D$ et une matrice inversible $P$ telles que $A = PDP^{-1}$. On cherche une base $\mathcal{B}$, dans laquelle $A$ est représentée par une matrice diagonale $D$ et on prend $P$ la matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}$.

Comment peut-on, en pratique, trouver une telle matrice diagonale $D$ ?

Pour cela, quelques notions sont nécessaires ...

## Définition 5 (Vecteurs propres, valeurs propres)

Soit $f \in End(E)$.

- Un vecteur $\vec{u} \in E$ est un vecteur propre de $f$ si :
  - $\vec{u} \neq \vec{0}$,
  - il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f(\vec{u}) = \lambda \vec{u}$.
- Un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de $f$ s'il existe $\vec{u} \in E$ tels que $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $f(\vec{u}) = \lambda \vec{u}$.
- Si $\vec{u}$ est un vecteur propre de $f$, l'unique scalaire $\lambda$ vérifiant $f(\vec{u}) = \lambda \vec{u}$ est appelé la valeur propre associée à $\vec{u}$.

## Remarque

Si $\vec{u}$ est un vecteur propre de $f$, alors pour tout scalaire $\alpha$ non nul, $\alpha \vec{u}$ est un vecteur propre de $f$.
En effet,

$$f(\alpha \vec{u}) = \alpha f(\vec{u}) = \alpha \lambda \vec{u} = \lambda(\alpha \vec{u}).$$

On définit les valeurs propres et les vecteurs propres des matrices, en utilisant les applications linéaires associées.

- Un vecteur $\vec{u} \in E$ est un vecteur propre de $A$ s'il est pour l'application linéaire associée.
- De même, un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de $A$ si elle l'est pour l'application linéaire associée.

Cela revient à dire :

- Un vecteur $\vec{u} = (x_1, \ldots, x_n) \in E$ est un vecteur propre de $A$ si $\vec{u} \neq 0$ et s'il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que :

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

- De même, un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de $A$ s'il existe $\vec{u} = (x_1, \ldots, x_n) \in E$ tels que $\vec{u} \neq \vec{0}$ et

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

## Proposition 3

L'endomorphisme $f$ est diagonalisable, si et seulement si, il existe une base de $E$ formée de vecteurs propres de $f$.

## Preuve

Si $f$ est diagonalisable, alors il existe une base $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ de $E$ telle que

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Donc pour tout $1 \leq i \leq n$, $f(\vec{u}_i) = \lambda_i \vec{u}_i$. D'où $\vec{u}_i$ est un vecteur propre.

Réciproquement, si $E$ admet une base $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ formée de vecteurs propres de $f$, alors pour tout $1 \leq i \leq n$, il existe $\lambda_i$ tel que $f(\vec{u}_i) = \lambda_i \vec{u}_i$. Donc

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

et $f$ est diagonalisable. □

La traduction de la proposition 1 pour les matrices :

## Proposition 3 bis

Une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable ssi elle possède $n$ vecteurs propres formant une base de $\mathbb{K}^n$.

## VI. 4. Sous-espaces propres

### Rappel

Soient $U$ et $V$ deux s.e.v du $\mathbb{K}$-e.v $E$.

- On appelle somme de $U$ et $V$ l'ensemble défini par

$$U + V = \{\vec{u} + \vec{v} \mid \vec{u} \in U, \vec{v} \in V\}.$$

- On dit que la somme $U + V$ est directe si $U \cap V = \{\vec{0}\}$.
- On dit du s.e.v $F$ qu'il est la somme directe de $U$ et $V$ si
  - $F = U + V$ ;
  - $U \cap V = \{\vec{0}\}$.

  On écrit $F = U \oplus V$.

Plus généralement, soient $U_1, \dots, U_m$, des s.e.v de $E$. On dit que $E$ est la somme directe de $U_1, \dots, U_m$ et on écrit $E = U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_m$ si :

- $E = U_1 + U_2 \cdots + U_m = \{\vec{u}_1 + \cdots + \vec{u}_m \mid \vec{u}_i \in U_i\}$,
- pour tout $\vec{u}_1 \in U_1, \vec{u}_2 \in U_2, \dots, \vec{u}_m \in U_m$ :

  si $\vec{u}_1 + \cdots + \vec{u}_m = \vec{0}$ alors $\vec{u}_i = \vec{0}$ pour tout $1 \leq i \leq m$.

### Propriété

Soient $U_1, \dots, U_m$, des s.e.v de $E$. Pour chaque $1 \leq i \leq m$ , soit $\mathcal{B}_i$ une base de $U_i$. Alors $E$ est la somme directe de $U_1, \dots, U_m$, si et seulement si, $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_m$ est une base de $E$.

### Définition 6

Soit $f$ un endomorphisme de $E$ et soit $\lambda$ une valeur propre de $f$. On appelle sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda$ de $f$, le sous-espace vectoriel

$$E_\lambda(f) = Ker(f - \lambda Id_E) = \{\vec{u} \in E \mid f(\vec{u}) = \lambda \vec{u}\}.$$

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda$ une valeur propre de $A$, on définit d'une façon similaire le sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda$ de $A$

$$E_\lambda(A) = \{\vec{u} \in E \mid A\vec{u} = \lambda\vec{u}\}.$$

## Proposition 4

L'endomorphisme $f$ est diagonalisable, si et seulement si, $E$ est somme directe de ses sous-espaces propres.

Autrement dit, si $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ sont les valeurs propres de $f$, deux à deux distinctes, $f$ est diagonalisable si et seulement si

$$E = E_{\lambda_1}(f) \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_m}(f).$$

## Corollaire 1

Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ sont les valeurs propres de $f$, deux à deux distinctes, $f$ est diagonalisable si et seulement si

$$\dim(E) = \dim(E_{\lambda_1}(f)) + \cdots + \dim(E_{\lambda_m}(f)).$$

## Corollaire 2

Si $\dim(E) = n$ et $f$ admet $n$ valeurs propres distinctes, alors $f$ est diagonalisable.

## VI. 5. Polynôme caractéristique

## Définition 7

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit

$$P_A(X) = \det(A - XI_n).$$

Alors $P_A(X)$ est un polynôme de degré $n$, appelé le polynôme caractéristique de $A$.

## Exemple

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$A - XI_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} - X\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1-X & 3 \\ 4 & 2-X \end{pmatrix}.$$

On a

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 3 \\ 4 & 2-X \end{vmatrix} = (1-X)(2-X) - 12 = X^2 - 3X - 10.$$

Soit $f \in End(E)$. Soient $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ deux bases de $E$. Alors

$$M_{\mathcal{B}_1}(f) = P^{-1} M_{\mathcal{B}_2}(f) P$$

où $P$ est la matrice de passage de $\mathcal{B}_2$ à $\mathcal{B}_1$. On a

$$\det(M_{\mathcal{B}_1}(f) - XI_n) = \det(P^{-1} M_{\mathcal{B}_2}(f) P - XI_n)$$
$$= \det(P^{-1}(M_{\mathcal{B}_2}(f) - XI_n)P) = \det(M_{\mathcal{B}_2}(f) - XI_n).$$

Cela permet de définir :

## Définition 8

Soit $f \in End(E)$. Soit $\mathcal{B}$ une base de $E$. On définit le polynôme caractéristique de $f$ par :

$$P_f(X) = \det(M_{\mathcal{B}}(f) - XI_n).$$

(Donc il ne dépend pas de la base $\mathcal{B}$).

## Proposition 5

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors $\lambda$ est une valeur propre de $A$, si et seulement si, $\lambda$ est racine du polynôme caractéristique de $A$.

## Preuve

- Si $\lambda$ est une valeur propre de $A$, alors il existe $\vec{u}$ avec $\vec{u} \neq 0$ tel que $A\vec{u} = \lambda\vec{u}$. Donc $(A - \lambda I_n)\vec{u} = \vec{0}$. Donc $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible et donc $\det(A - \lambda I_n) = 0$.
- Si $\det(A - \lambda I_n) = 0$, alors $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible et donc il existe $\vec{u}$ avec $\vec{u} \neq 0$ tel que $(A - \lambda I_n)\vec{u} = \vec{0}$ et donc $\vec{u} \neq 0$ tel que $A\vec{u} = \lambda\vec{u}$. Donc $\lambda$ est une valeur propre.

□

## Exemple

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

On a

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} 1 - X & 0 \\ 5 & 2 - X \end{vmatrix} = (1 - X)(2 - X).$$

Donc les valeurs propres de $A$ sont 1 et 2.

## Rappel sur les polynômes

- Une racine $\lambda$ d'un polynôme $P(X) \in \mathbb{K}[X]$, est une racine de multiplicité $m$ si $(X - \lambda)^m$ divise $P(X)$ mais $(X - \lambda)^{m+1}$ ne divise pas $P(X)$.
- Un polynôme $P(X) \in \mathbb{K}[X]$, de degré $n$, est dit scindé dans $\mathbb{K}[X]$, s'il peut s'écrire sous la forme

$$P(X) = a(X - \lambda_1)^{m_1} \cdots (X - \lambda_p)^{m_p}$$

où $m_i \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{K}^*$, $\lambda_i \in \mathbb{K}$ (et $m_1 + \cdots + m_p = n$).

## Exemple

(1) Soit

$$P(X) = X^3 - 5X^2 + 7X - 3.$$

Alors

$$P(X) = (X-1)^2(X-3).$$

La multiplicité de la racine $\lambda_1 = 1$ est 2 et la multiplicité de la racine $\lambda_2 = 3$ est 1. On voit aussi que $P$ est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ mais aussi dans $\mathbb{C}[X]$.

(2) Le polynôme $P(X) = X^2 + X + 1$ n'est pas scindé dans $\mathbb{R}[X]$ car il n'admet pas de racine réelle. Par contre il est scindé dans $\mathbb{C}[X]$ : $P(X) = (X-j)(X-\bar{j})$ où $j = e^{i\pi/3}$.

## Définition 9

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de $A$.

- La multiplicité algébrique de $\lambda$ est la multiplicité de $\lambda$ comme racine de $P_A(X)$.
- La multiplicité géométrique de $\lambda$ est la dimension du sous-espace propre $E_\lambda(A)$.

## VI. 6. Diagonalisation

## Théorème (CNS pour la diagonalisation)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $A$ est diagonalisable si et seulement si les propriétés suivantes sont satisfaites :

- Le polynôme caractéristique $P_A(X)$ est scindé dans $\mathbb{K}[X]$ : dans ce cas

$$P_A(X) = (-1)^n (X-\lambda_1)^{m_1} \cdots (X-\lambda_p)^{m_p}$$

  où $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont les valeurs propres ; $m_i$ est la multiplicité algébrique de $\lambda_i$.
- Pour chaque valeur propre $\lambda_i$, sa multiplicité algébrique coïncide avec sa multiplicité géométrique : $\dim(E_{\lambda_i}(A)) = m_i$.

### Mise en pratique

- On calcule le polynôme caractéristique $P_A(X)$.
- On cherche les racines de $P_A(X)$, $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$, et les multiplicités algébriques $m_1, \ldots, m_p$.
  - Si $P_A(X)$ n'est pas scindé, alors $A$ n'est pas diagonalisable.
  - Si $P_A(X)$ est scindé, on cherche les bases des sous-espaces propres $E_{\lambda_i}(A)$. Si pour chaque $i$, $\dim(E_{\lambda_i}(A)) = m_i$, alors $A$ est diagonalisable :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \lambda_1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \ddots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_p & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \lambda_p \end{pmatrix}.$$

  où chaque $\lambda_i$ est répété $m_i$-fois.

Dans ce cas, si $\mathcal{B}_i$ est une base de $E_{\lambda_i}(A)$, alors $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_p$ est une base de $\mathbb{K}^n$ formée de vecteurs propres de $A$. On a alors $A = PDP^{-1}$ où $P$ est la matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}$.

**(1)** Soit
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$
On a
$$P_A(X) = \begin{vmatrix} 1-X & -3 \\ 3 & 4-X \end{vmatrix} = X^2 - 5X + 13.$$
Le discriminant est strictement négatif et donc $P_A(X)$ n'admet pas de racines dans $\mathbb{R}$. Donc $A$ n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$.
**(2)** Soit
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$
On a
$$P_A(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 2 \\ -1 & 4-X \end{vmatrix} = X^2 - 5X + 6 = (X-2)(X-3)$$
et donc les valeurs propres sont $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 3$.
Comme $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $P_A(X)$ admet deux racines distinctes, $A$ est diagonalisable (on applique ici le corollaire 2). La matrice diagonale est
$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$
On a
$$E_{\lambda_1}(A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\}. = Vect((2,1))$$
$$E_{\lambda_2}(A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\} = Vect((1,1)).$$
En posant $\vec{u} = (2,1), \vec{v} = (1,1)$, $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v})$ est une base de $\mathbb{R}^2$ formée de vecteurs propres de $A$. La matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}$ est
$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
On a
$$A = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1}.$$
**(3)** Soit
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$
1. Polynôme caractéristique : on a
$$P_A(X) = \begin{vmatrix} 3-X & 0 & -1 \\ 2 & 4-X & 2 \\ -1 & 0 & 3-X \end{vmatrix} = (4-X) \begin{vmatrix} 3-X & -1 \\ -1 & 3-X \end{vmatrix}$$
$$= (2-X)(4-X)^2.$$
Donc $A$ possède deux valeurs propres : 2 de multiplicité algébrique 1 (on dit qu'elle est simple) et 4 de multiplicité algébrique 2 (on dit qu'elle est double). En plus $P_A$ est scindé.

2. Sous-espaces propres : on a

$$E_2(A) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\}.$$

$$E_4(A) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\}.$$

En résolvant le système homogène $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, par la méthode de Gauss par exemple, on obtient

$$E_2(A) = Vect(\vec{u}), \text{ où } \vec{u} = (1, -2, 1).$$

De même

$$E_4(A) = Vect(\vec{v}, \vec{w}), \text{ où } \vec{v} = (0, 1, 0), \vec{w} = (1, 0, -1).$$

Donc la multiplicité géométrique de la valeur propre 2 est 1 et celle de la valeur propre 4 est 2.

3. Diagonalisabilité : comme $P_A$ est scindé et la multiplicité algébrique de chaque valeur propre coïncide avec sa multiplicité géométrique, $A$ est diagonalisable.
4. Diagonalisation : on a

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \ P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \ A = PDP^{-1}.$$

## VI. 7. Théorème de Cayley-Hamilton

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-e.v et $P \in \mathbb{K}[X]$

$$P(X) = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0.$$

Si $f \in End(E)$, on note $P(f)$ l'endomorphisme de $E$ défini par

$$P(f) = a_n f^n + \cdots + a_1 f + a_0 Id_E,$$

où $f^k = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{k-fois}$.

De même si $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$, alors $P(A)$ est définie par

$$P(A) = a_n A^n + \cdots + a_1 A + a_0 I_m.$$

## Théorème (Théorème de Cayley-Hamilton)

Soit $f \in End(E)$ (resp. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) et $P_f(X)$ son polynôme caractéristique (resp. $P_A(X)$). Alors $P_f(f) = 0$ (resp. $P_A(A) = 0$).

## Exemple

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Son polynôme caractéristique est

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 2 \\ 4 & 1-X \end{vmatrix} = (1-X)^2 - 8 = X^2 - 2X - 7.$$

D'après le théorème, on a

$$A^2 - 2A - 7I_2 = \text{ la matrice nulle }.$$

Cela permet par exemple de calculer $A^2$ en utilisant $A$ et la matrice identité $I_2$.
On a aussi

$$A \cdot (\frac{1}{7}(A - 2I_2)) = I_2$$

et on déduit que $A^{-1} = \frac{1}{7}(A - 2I_2)$.