Fiche 5 - Produit scalaire, diagonalisation

Exercice 1. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire canonique. Soient $\vec{v} = (-3, 5, 8)$ et $\vec{w} = (1, -4, 9)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

1. Calculer les longueurs de $\vec{v}$ et $\vec{w}$.
2. Calculer l'angle non-orienté entre $\vec{v}$ et $\vec{w}$.
3. Calculer le résultat de la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur la droite engendrée par $\vec{w}$.
4. Trouver une base orthonormée du plan engendré par les deux vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$.
5. Trouver un vecteur orthogonal aux deux vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

Exercice 2. Soient $\vec{v} = (1 + i, 1 - i)$ et $\vec{w} = (1 - i, 1 + i)$ deux vecteurs de $\mathbb{C}^2$ muni du produit scalaire canonique. Calculer le produit scalaire $\langle \vec{v} | \vec{w} \rangle$ et les normes de $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

Exercice 3. On considère $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique. Orthonormaliser en suivant le procédé de Gram-Schmidt la base constituée des vecteurs

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4. On considère $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique. Soit F le sous-espace vectoriel $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$.

1. Déterminer une base orthonormée de F.
2. Déterminer la projection orthogonale p_F sur F.

Exercice 5. Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égale à 3, muni du produit scalaire

$$\langle P | Q \rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt.$$

Appliquer le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt aux vecteurs $P_0(X) = 1$, $P_1(X) = X$ et $P_2(X) = X^2$.

Exercice 6. Montrer que l'application $B : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie pour tous $\vec{u} = (x_1, x_2)$, $\vec{v} = (y_1, y_2)$ par

$$B(\vec{u}, \vec{v}) = x_1 y_1 - 2x_1 y_2 - 2x_2 y_1 + 6x_2 y_2$$

définie un produit scalaire dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 7. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire canonique et on considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Trouver une matrice orthogonale O telle que OA^tO soit diagonale.

Exercice 8. On munit $\mathbb{C}^2$ du produit scalaire canonique et on considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}.$$

Trouver une matrice unitaire U telle que UAU^* soit diagonale.

Exercices supplémentaires

Exercice 9. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire canonique. Soit Can la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que Can est une base orthonormée.
2. Montrer que la base $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ définie par

$$u_1 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}), u_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0), u_3 = (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}})$$

   est une base orthonormée.
3. Calculer la matrice de passage P de la base Can à la base $\mathcal{B}$.
4. Vérifier que $P \cdot {}^tP = {}^tP \cdot P = I$.

Exercice 10. Diagonaliser en base orthonormée les matrices symétriques suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & -8 \end{pmatrix}.$$

Exercice 11. Soit P le plan dans $\mathbb{R}^3$ qui passe par les points $(0,0,0)$, $(1,2,-1)$ et $(2,1,1)$. Trouver une base orthonormée $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $(\vec{b}_1, \vec{b}_2)$ soit une base du plan P.

Exercice 12. Pour chacune des matrices symétriques suivantes, trouver une matrice orthogonale O telle que $OA{}^tO$ soit diagonale.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 0 & 7 & -2 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Exercice 13. Calculer les valeurs propres et déterminer une base orthonormée de vecteurs propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 14. Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ et soit $\varphi : E \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$\varphi(P, Q) = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2).$$

Montrer que φ est un produit scalaire.

Exercice 15.

1. Montrer que l'application $B : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par

$$B(x, y) = x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 6x_2y_2$$

   définie un produit scalaire dans $\mathbb{R}^2$. Trouver une base de $\mathbb{R}^2$ qui soit orthonormaée par rapport à B.
2. Déterminer pour quelles valeurs réelles de a, b l'application $B : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ suivante est un produit scalaire dans $\mathbb{R}^3$

$$B(x, y) = ax_1y_1 + bx_1y_2 + bx_2y_1 + bx_2y_2 + (1 + b)x_3y_3.$$

Exercice 16.

1. Rappeler l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
2. Montrer que pour toute fonction continue d'un intervalle $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, on a :

$$\left(\int_a^b f(t)\, dt\right)^2 \leq (b - a) \int_a^b (f(t))^2\, dt.$$

Exercice 17. Soit A une matrice symétrique réelle de type $(2,2)$. Si les valeurs propres de A sont $3, 4$ et que $\binom{3}{4}$ est un vecteur propre associé à 3, trouver un vecteur propre associé à 4. Trouver A et une racine carrée de A, c'est-à-dire une matrice B telle que $B^2 = A$.

Exercice 18. Soit $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire

$$\langle M|N\rangle = Tr(M^tN)$$

Soit

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

1. Déterminer une base orthonormée de $F^\perp$.
2. Calculer la projection de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $F^\perp$.

Exercice 19. Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire

$$\langle P|Q\rangle = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2)$$

et soit $F = \mathbb{R}_1[X]$ le sous-espace vectoriel des polynômes de degré au plus 1.

1. Transformer la base canonique $(1, X)$ de F en une base orthonormée.
2. Déterminer $p_F(R)$ où p_F est le projecteur orthogonal sur F et $R(X) = 3X^2 - 5X$.
3. Déterminer la matrice de p_F dans la base $(1, X, X^2)$.
4. Retrouver le résultat de la question précédente.

Exercice 20. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -i & 0 \\ -1 & 2 & -i & 0 \\ i & i & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Trouver une matrice unitaire U telle que UAU^* soit diagonale.

Exercice 21. Soit D le disque unité fermé de $\mathbb{R}^2$. On considère l'espace vectoriel E des fonctions $f : D \to \mathbb{R}$ de classe C^1 nulles sur le bord de D. Pour $f, g \in E$, on pose

$$\langle f|g\rangle = \iint_D \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial y} \right) dxdy.$$

Montrer que c'est un produit scalaire.