TD 5. Produit scalaire, diagonalisation

Exercice 1. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire canonique. Soient $\vec{v} = (-3, 5, 8)$ et $\vec{w} = (1, -4, 9)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

1. Calculer les longueurs de $\vec{v}$ et $\vec{w}$.
2. Calculer l'angle non-orienté entre $\vec{v}$ et $\vec{w}$.
3. Calculer le résultat de la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur la droite engendrée par $\vec{w}$.
4. Trouver une base orthonormée du plan engendré par les deux vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$.
5. Trouver un vecteur orthogonal aux deux vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

Correction.

1. $\|\vec{v}\| = \sqrt{(-3)^2 + 5^2 + 8^2} = \sqrt{98}$, $\|\vec{w}\| = \sqrt{98}$.
2. $\cos\alpha = \frac{\langle \vec{v}|\vec{w}\rangle}{\|\vec{v}\|\|\vec{w}\|}$ avec $\alpha \in [0, \pi]$. $\cos\alpha = \frac{-3\times 1+5\times(-4)+8\times 9}{98} = \frac{1}{2}$ d'où $\alpha = \frac{\pi}{3}$.
3. La projection orthogonale de $\vec{v}$ sur la droite engendrée par $\vec{w}$ est le vecteur $\langle \vec{v}|\vec{w}\rangle \frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|^2} = \frac{1}{2}\vec{w}$.
4. Par la procédure d'orthonormalisation de Gram-Schmidt : $\vec{e}_1 := \|\vec{v}\|^{-1}\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{98}}(-3, 5, 8)$. Puis on cherche un vecteur $\vec{f}$ du plan engendré par $\vec{v}$ et $\vec{w}$ orthogonal à $\vec{e}_1$: $\vec{f} := \vec{w} - \langle \vec{e}_1|\vec{w}\rangle\vec{e}_1 = (\frac{5}{2}, -\frac{13}{2}, 5)$ et on le divise par sa norme pour obtenir un vecteur de norme 1, $\vec{e}_2 = \|\vec{f}\|^{-1}\vec{f} = \sqrt{\frac{2}{147}}(\frac{5}{2}, -\frac{13}{2}, 5)$.
5. Soit $\vec{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On veut $\langle \vec{u}|\vec{v}\rangle = 0$ et $\langle \vec{u}|\vec{v}\rangle = 0$. Ainsi

$$\begin{cases} -3x + 5y + 8z = 0 \\ x - 4y + 9z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 11z \\ y = 5z \end{cases}$$

Donc on peut prendre $\vec{u} = (11, 5, 1)$. ✓

Exercice 2. Soient $\vec{v} = (1 + i, 1 - i)$ et $\vec{w} = (1 - i, 1 + i)$ deux vecteurs de $\mathbb{C}^2$ muni du produit scalaire canonique. Calculer le produit scalaire $\langle \vec{v}|\vec{w}\rangle$ et les normes de $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

Correction. — On rappelle que sur $\mathbb{C}^2$ le produit scalaire canonique entre (z_1, z_2) et (z_3, z_4) est donné par $z_1\overline{z}_3 + z_2\overline{z}_4$. Ainsi $\langle \vec{v}|\vec{w}\rangle = 0$ et $\|\vec{v}\| = \|\vec{w}\| = 2$. ✓

Exercice 3. On considère $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique. Orthonormaliser en suivant le procédé de Gram-Schmidt la base constituée des vecteurs

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Correction. — $\vec{e}_1 := \|\vec{u}_1\|^{-1}\vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{u}_1$. $\vec{e}_2 = \|\vec{f}_2\|^{-1}\vec{f}_2$ avec $\vec{f}_2 := \vec{u}_2 - \langle \vec{e}_1|\vec{u}_2\rangle\vec{e}_1$. On trouve $\vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 2, -1)$. Enfin, $\vec{e}_3 = \|\vec{f}_3\|^{-1}\vec{f}_3$ avec $\vec{f}_3 := \vec{u}_3 - \langle \vec{e}_1|\vec{u}_3\rangle\vec{e}_1 - \langle \vec{e}_2|\vec{u}_3\rangle\vec{e}_2$. Je trouve $\vec{f}_3 = (-2, 0, 2)$ d'où $\vec{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1)$. ✓

Exercice 4. On considère $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique. Soit F le sous-espace vectoriel $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z=0\}$.

1. Déterminer une base orthonormée de F.
2. Déterminer la projection orthogonale p_F sur F.

Correction.

1. F est le plan d'équation $x+y+z=0$. Trouvons deux vecteurs de F indépendants puis orthonormalisons-les par Gram-Schmidt. $F = \{(x,y,-x-y), x,y \in \mathbb{R}\}$. Donc $\vec{u} = (1,0,-1)$ et $\vec{v} = (0,1,-1)$ appartiennent à F. Ils ne sont pas colinéaires donc sont indépendants. Définissons $\vec{e}_1$ par $\|\vec{u}\|^{-1}\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)$ puis $\vec{e}_2 = \|\vec{f}_2\|^{-1}\vec{f}_2$ avec $\vec{f}_2 = \vec{v} - \langle \vec{e}_1 | \vec{v}\rangle \vec{e}_1 = \frac{1}{2}(-1,2,-1)$ et $\vec{e}_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}(-\frac{1}{2},1,-\frac{1}{2})$.
2. $p_F : \mathbb{R}^3 \to F$, $(x,y,z) \longmapsto \langle (x,y,z)|\vec{e}_1\rangle \vec{e}_1 + \langle (x,y,z)|\vec{e}_2\rangle\vec{e}_2 = \frac{x-z}{\sqrt{2}}\vec{e}_1 + \sqrt{\frac{2}{3}}(-\frac{x}{2}+y-\frac{z}{2})\vec{e}_2$. ✓

Exercice 5. Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vetoriel des polynômes de degré inférieur ou égale à 3, muni du produit scalaire

$$\langle P|Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,dt.$$

Appliquer le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt aux vecteurs $P_0(X) = 1$, $P_1(X) = X$ et $P_2(X) = X^2$.

Correction. — Notons Q_0, Q_1, Q_2 les trois vecteurs recherchés. $\|P_0\|^2 = \int_{-1}^{1} P_0^2(t)\,dt = 2$. $Q_0(X) := \|P_0\|^{-1}P_0(X) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. On note que $P_1 \perp P_0$ donc $Q_1 := \|P_1\|^{-1}P_1$ d'où $Q_1(X) = \sqrt{\frac{3}{2}}X$. Enfin $R_2(X) := P_2(X) - \langle P_2|Q_0\rangle Q_0 - \langle P_2|Q_1\rangle Q_1 = X^2 - \frac{1}{3}$ et $Q_2(X) = \|R_2\|^{-1}R_2(X) = \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}(X^2-\frac{1}{3})$. ✓

Exercice 6. Montrer que l'application $B : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie pour tout $\vec{u} = (x_1,x_2)$ et $\vec{v} = (y_1,y_2)$ par

$$B(\vec{u},\vec{v}) = x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 6x_2y_2$$

définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Correction. — B est une forme bilinéaire, symétrique et définie positive. En effet, pour tout $(y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2$, l'application $(x_1,x_2) \longmapsto B((x_1,x_2),(y_1,y_2))$ est linéaire car c'est un polynôme homogène de degré 1 en y_1 et y_2. Pour la même raison, pour tout $(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$, l'application $(y_1,y_2) \longmapsto B((x_1,x_2),(y_1,y_2))$ est linéaire. B est symétrique car l'expression $B((x_1,x_2),(y_1,y_2))$ est symétrique sous l'échange simultané $x_1 \leftrightarrow y_1$ et $x_2 \leftrightarrow y_2$. Enfin, B est définie positive car pour tout $(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$,

— $B((x_1,x_2),(x_1,x_2))$ est positif :

$$B((x_1,x_2),(x_1,x_2)) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 6x_2^2 = (x_1-2x_2)^2 + 2x_2^2,$$

— $B((x_1,x_2),(x_1,x_2)) = 0 \iff (x_1,x_2) = (0,0)$:

$$B((x_1,x_2),(x_1,x_2)) = 0 \iff x_1 - 2x_2 = 0 \text{ et } x_2 = 0.$$ ✓

Exercice 7. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire canonique et on considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Trouver une matrice orthogonale O telle que OAO^t soit diagonale.

Correction. — A est symétrique ($A^t = A$) donc diagonalisable dans une base orthornormée. Le polynôme caractéristique de A est $P_A(x) = (1-x)(2+x)^2$. L'espace propre $E_1(A)$ associé à la valeur propre 1 de A est $\mathrm{Vect}\big((-5/3, -1/3, 1)\big)$. L'espace propre $E_{-2}(A)$ est le plan d'équation $x + y + z = 0$. Si on a traité l'exercice 4, on a déjà une base orthonormée de $E_{-2}(A)$. Les espaces propres d'une matrice symétrique associés à des valeurs propres différentes sont orthogonaux. ✓

Exercice 8. On munit $\mathbb{C}^2$ du produit scalaire canonique et on considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}.$$

Trouver une matrice unitaire U telle que UAU^* soit diagonale.

Correction. — La matrice A est hermitienne ($A = A^*$) donc diagonalisable dans une base $\mathcal{B}$ (de $\mathbb{C}^2$) orthonormée et la matrice de passage $P \coloneqq P_{\mathcal{B}\mathrm{Can}}$ de la base canonique à $\mathcal{B}$ est unitaire (donc $U = P$). Pour déterminer la base orthornormée $\mathcal{B}$ de $\mathbb{C}^2$, on doit trouver une base orthonormée de chacun des espaces propres de A. L'ensemble des vecteurs de toutes ces bases forme une base orthornormée de $\mathbb{C}^2$ car les espaces propres d'une matrice hermitienne, associés à des valeurs propres *différentes*, sont orthogonaux.

Les valeurs propres de A, racines de son polynôme caractéristique, sont 0 et 2. L'espace propre $E_0(A)$ de A associée à la valeur propre 0 est

$$\left\{\vec{u} \in \mathbb{C}^2 : A\vec{u} = \vec{0}\right\}.$$

En notant $\vec{u} = \binom{z_1}{z_2}$, on a

$$A\vec{u} = \vec{0} \iff z_1 + iz_2 = 0 \iff z_2 = iz_1.$$

Ainsi, $E_0(A) = \mathrm{Vect}\big((1,i)\big)$. De façon similaire, on montre que $E_2(A) = \mathrm{Vect}\big((1,-i)\big)$. Notez que, comme anoncé plus haut, les vecteurs $(1,i)$ et $(1,-i)$ sont orthogonaux. Pour déterminer la base orthonormée $\mathcal{B}$, il ne reste plus qu'à normer ces deux vecteurs :

$$\|(1,i)\|^2 = 1 \times \bar{1} + i \times \bar{i} = 2 = \|(1,-i)\|.$$

Donc $\mathcal{B} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1,i), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-i)\right)$ et la matrice U recherchée est $P_{\mathcal{B}\mathrm{Can}} = P^{-1}_{\mathrm{Can}\mathcal{B}} = P^*_{\mathrm{Can}\mathcal{B}}$:

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}.$$

On pourra vérifier que

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$ ✓