Fiche 9 - Séries de Fourier

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour } x \in [0, \pi] \\ 0 & \text{pour } x \in]\pi, 2\pi[. \end{cases}$$

1. Dessiner le graphe de f sur $[-2\pi, 2\pi]$.
2. Calculer les coefficients de Fourier a_n et b_n de f.
3. En déduire la série de Fourier de f qu'on notera Sf.
4. Pour quelles valeurs de x a-t-on $Sf(x) = f(x)$?
5. En déduire, en fonction de $x \in \mathbb{R}$, la valeur de la somme

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin((2n+1)x)}{2n+1}.$$

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique, paire et telle que

$$f(x) = 2x - \pi \qquad \text{sur } [0, \pi].$$

1. Dessiner le graphe de f sur une $[-3\pi, 3\pi]$ et exprimer $f(x)$ sur $[\pi, 2\pi]$.
2. Déterminer la série de Fourier de f. On note $Sf(x)$ la somme de la série.
3. Pour quelles valeurs de x a-t-on $Sf(x) = f(x)$?
4. En déduire la valeur de la somme :

$$\sum_{p \geqslant 0} \frac{1}{(2p+1)^2}.$$

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique et vérifiant

$$f(x) = x \qquad \text{sur } [-\pi, \pi[.$$

1. Dessiner le graphe de f sur l'intervalle $[-3\pi, 3\pi]$.
2. Calculer les coefficients de Fourier a_n et b_n de f.
3. En déduire la série de Fourier de f qu'on notera Sf.
4. Pour quelles valeurs de x a-t-on $Sf(x) = f(x)$?
5. En déduire la valeur de la somme :

$$\sum_{p \geqslant 0} \frac{(-1)^p}{2p+1}.$$

Exercices supplémentaires

Exercice 4. Soit $\alpha \in]0, \pi[$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie sur $[-\pi, \pi]$ par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [-\alpha, \alpha] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Dessiner le graphe f sur $[-2\pi, 2\pi]$.
2. Calculer les coefficients de Fourier a_n et b_n de f.
3. En déduire la série de Fourier de f.
4. En déduire la somme de la série
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\alpha)^2}{n^2}.$$

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique, impaire et telle que
$$f(t) = \frac{\pi - t}{2} \qquad \text{sur }]0, \pi].$$

1. Dessiner le graphe de f sur une période.
2. Etudier la convergence de la série de Fourier de f.
3. Calculer la série de Fourier de f (avec les fonctions sin et cos).
4. En déduire la valeur des sommes suivantes :
$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin n}{n} \quad \text{et} \quad \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}.$$

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie sur $[-\pi, \pi]$ par $f(x) = x^2$.

1. Dessiner le graphe de f sur l'intervalle $[-3\pi, 3\pi]$.
2. Calculer les coefficients de Fourier de f.
3. Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$, a-t-on $Sf(x) = f(x)$?
4. Calculer les sommes des séries numériques suivantes
$$(a) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}, \quad (b) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}.$$

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie sur $[-\pi, \pi]$ par $f(x) = 1 - \dfrac{x^2}{\pi^2}$.

1. Dessiner le graphe de f sur l'intervalle $[-3\pi, 3\pi]$.
2. Calculer les coefficients de Fourier de f.
3. Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$, a-t-on $Sf(x) = f(x)$?
4. Calculer les sommes des séries numériques suivantes
$$(a) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}, \quad (b) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}.$$

Exercice 8. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie sur $[-\pi, \pi[$ par $f(x) = \operatorname{ch} x$.

1. Dessiner le graphe de f sur l'intervalle $[-3\pi, 3\pi]$.
2. Calculer les coefficients de Fourier de f.
3. Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$, a-t-on $Sf(x) = f(x)$?
4. Calculer les sommes des séries numériques suivantes
$$(a) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}, \quad (b) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}, \quad (c) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}.$$

Exercice 9. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 4π-périodique et paire définie sur $[0, 2\pi]$ par $f(x) = \pi - x$.

1. Dessiner le graphe de f sur l'intervalle $[-6\pi, 6\pi]$.
2. Calculer les coefficients de Fourier de f.
3. Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$, a-t-on

$$\pi - x = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos((n+\frac{1}{2})x)}{(2n+1)^2}.$$

Exercice 10. Soit $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x(\pi - x)$.

1. Déterminer une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $x \in [0, \pi]$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(nx).$$

2. Déterminer une suite réelle $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $x \in [0, \pi]$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \sin(nx).$$

3. Calculer les sommes des séries numériques suivantes

$$(a) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}, \quad (b) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}, \quad (c) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6}.$$

Exercice 11. On considère l'équation differentielle

$$f''(x) + Cf(x) = \cos^2(\omega x), \tag{E}$$

où $\omega > 0$ et $C \in \mathbb{R}$.

1. Développer la fonction $h(x) := \cos^2(\omega x)$ en série de Fourier.
2. Déterminer les valeurs C pour lesquelles (E) admet une solution périodique (développable en série de Fourier) de période $\frac{2\pi}{\omega}$ et déterminer cette solution.

Exercice 12. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue, C^1 par morceau et 2π-périodique. On cherche les solutions 2π-périodiques de l'équation différentielle

$$y'' - y = f.$$

1. Montrer qu'il existe au plus une solution 2π-périodique.
2. Trouver une telle solution pour $f(t) = e^{ikt}$, avec $k \in \mathbb{Z}$.
3. En décomposant f en série de Fourier, trouver une solution 2π-périodique de cette équation sous forme de série.
4. Justifier la convergence de la série pour la solution.