Fiche 10 - Séries de Fourier (suite)

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie sur $[-\pi, \pi]$ par $f(x) = x^2$.

1. Dessiner le graphe de f sur l'intervalle $[-3\pi, 3\pi]$.
2. Calculer les coefficients de Fourier de f.
3. Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$, a-t-on $Sf(x) = f(x)$?
4. Calculer les sommes des séries numériques suivantes

$$(a) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}, \quad (b) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}.$$

Exercice 2. On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad y'' + y = |\cos(x)|$$

On pose $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = |\cos(x)|$.

1. Dessiner le graphe de f sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$.
2. Déterminer la série de Fourier de f.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $Sf(x) = f(x)$. A-t-on convergence uniforme ?
4. Calculer une solution particulière de (E) développable en série de Fourier.
5. En déduire la solution générale de (E).

Exercices supplémentaires

Exercice 3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie sur $[-\pi, \pi]$ par $f(x) = \cos(\alpha x)$.

1. Dessiner le graphe de f sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$.
2. Calculer les coefficients de Fourier de f.
3. Déterminer la série de Fourier de f. Expliciter l'écriture complexe.
4. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $Sf(x) = f(x)$.
5. Calculer la somme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 - n^2}.$$

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie sur $[0, 2\pi]$ par $f(x) = x \sin(\frac{x}{2})$.

1. Dessiner le graphe de f sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$.
2. Calculer les coefficients de Fourier de f.
3. Déterminer la série de Fourier de f.
4. Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$, a-t-on $Sf(x) = f(x)$?
5. Calculer la somme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{4n^2 - 1}.$$

Exercice 5. Montrer que pour tout $x \in [0, 2\pi]$ on a

$$\frac{x^2}{2} = \pi x - \frac{\pi^2}{3} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2}.$$

En déduire les valeurs des sommes

$$(1) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}, \qquad (2) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique et impaire définie sur $]0, \pi]$ par $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$.

1. Dessiner le graphe de f sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$.
2. Calculer les coefficients de Fourier de f.
3. Déterminer la série de Fourier de f.
4. Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$, a-t-on $Sf(x) = f(x)$? A-t-on convergence uniforme ?

On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad y'' + 2y = f(x)$$

On suppose que (E) admet une solution particulière y_0 impaire, 2π-périodique et développable en série de Fourier :

$$y_0(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \sin(nx).$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a
$$\alpha_n = \frac{1}{n(2 - n^2)}.$$
2. En déduire la solution générale de (E).
3. Exprimer l'énergie totale du signal représenté par y_0
$$E = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y_0(x)^2 \, dx$$
comme la somme d'une série numérique.