Louis Dupaigne

3.12.2019

MATH3

Ex 8 Fiche 6

Factorisons par le terme dominant :

$$\frac{2n+1}{n(n^2-4)^\alpha} = \frac{n\left(2+\frac{1}{n}\right)}{n\cdot n^{2\alpha}\left(1-\frac{4}{n^2}\right)^\alpha} = n^{-2\alpha}\frac{2+1/n}{(1-4/n^2)^\alpha} \underset{+\infty}{\sim} 2n^{-2\alpha}$$

Par le th des équivalents et le critère de Riemann, la série converge si et seulement si $2\alpha > 1 \iff \boxed{\alpha > 1/2}$.

Pour $\alpha = 1$, on reconnaît une fraction rationnelle :

$$\frac{2n+1}{n(n^2-4)} = \frac{2n+1}{n(n-2)(n+2)} = \frac{-1/4}{n} + \frac{5/8}{n-2} + \frac{-3/8}{n+2}$$

D'où,

$$\sum_{n=3}^{N}\frac{2n+1}{n(n-2)(n+2)} = -\frac{1}{4}\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n} + \frac{5}{8}\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n-2} - \frac{3}{8}\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n+2}$$

$$= -\frac{1}{4}\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n} + \frac{5}{8}\sum_{n=1}^{N-2}\frac{1}{n} - \frac{3}{8}\sum_{n=5}^{N+2}\frac{1}{n}$$

$$= -\frac{1}{4}\left\{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\sum_{n=5}^{N-2}\frac{1}{n}+\frac{1}{N-1}+\frac{1}{N}\right\} + \frac{5}{8}\left\{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\sum_{n=5}^{N-2}\frac{1}{n}\right\}$$

$$-\frac{3}{8}\left\{\sum_{n=5}^{N-2}\frac{1}{n}+\frac{1}{N-1}+\frac{1}{N}+\frac{1}{N+1}+\frac{1}{N+2}\right\}$$

$$= -\frac{1}{4}\left\{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right\} + \frac{5}{8}\left\{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right\} + \left\{-\frac{1}{4N} - \frac{3}{8}\left(\frac{1}{N-1}+\frac{1}{N}+\frac{1}{N+1}+\frac{1}{N+2}\right)\right\}$$

D'où,

$$\boxed{\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{2n+1}{n(n-2)(n+2)}} = \left(-\frac{1}{4}+\frac{5}{8}\right)\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) + \frac{5}{8}\left(1+\frac{1}{2}\right)$$

$$= +\frac{3}{8}\cdot\frac{7}{3\cdot 4} + \frac{5}{8}\cdot\frac{3}{2} = +\frac{7}{4\cdot 8} + \frac{15}{2\cdot 8} = \boxed{\frac{37}{32}}$$

Ex9 Fiche 6

Cherchons un équivalent simple de u_n.

On rappelle que $\sin(x) = x + o(x)$, lorsque $x \to 0$ mais qu'on ne peut pas utiliser ce DL ici car $n \to +\infty$. Toutefois,

$$-1 \leq \sin(n) \leq 1 \quad \text{et} \quad \sqrt{n} \longrightarrow +\infty, \text{ lorsque } n \longrightarrow +\infty.$$

Donc $\sin(n) = o(\sqrt{n})$ et

$$u_n = \frac{\sqrt{n} + o(\sqrt{n})}{\mathrm{Ln}\left[n(1+\frac{1}{n})\right] + n^3} = \frac{\sqrt{n} + o(\sqrt{n})}{n^3 + \mathrm{Ln}(n) + \mathrm{Ln}(1+\frac{1}{n})}$$

Par croissance comparée, $\mathrm{Ln}(n) = o(n^3)$, de sorte que

$$u_n \sim \frac{\sqrt{n}}{n^3} = \frac{n^{1/2}}{n^3} = n^{-5/2}$$

Comme $5/2 > 1$, on déduit du théorème des équivalents et du critère de Riemann que la série $\sum u_n$ est convergente.

Ex 4 Fiche 8

Appliquons le critère de d'Alembert :

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{(n+1)(n+1-2)} \cdot n(n-2) = \frac{n(n-2)}{(n+1)(n-1)} = \frac{1-2/n}{(1+1/n)(1-1/n)} \longrightarrow 1$$

Donc, $R = \frac{1}{1} = 1$: la série converge pour $x \in]-1,1[$ et diverge pour $x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$. En particulier, u est dérivable sur $]-1,1[$ et

$$u'(x) = \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{n x^{n-1}}{n(n-2)} = \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n-2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n}$$

$$= x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -x\ln(1-x), \text{ d'après le formulaire}$$

On intègre pour trouver u :

$$u(x) = \int -x\ln(1-x)\,dx \overset{IPP}{=} -\frac{x^2}{2}\ln(1-x) - \int \frac{-x^2}{2}\,\frac{-1}{1-x}\,dx$$

$$= -\frac{x^2}{2}\ln(1-x) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1-x}\,dx$$

Or $\frac{x^2}{1-x} = \frac{x^2-1}{1-x} + \frac{1}{1-x} = -(1+x) + \frac{1}{1-x}$.

D'où,

$$u(x) = -\frac{x^2}{2}\ln(1-x) + \frac{1}{2}\int (1+x) - \frac{1}{1-x}\,dx$$

$$= -\frac{x^2}{2}\ln(1-x) + \frac{1}{2}\left(x + \frac{x^2}{2} + \ln(1-x)\right) + C$$

Comme $u(0)=0$, $C=0$ et donc

$$\boxed{u(x) = \frac{1}{2}(1-x^2)\ln(1-x) + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2, \quad x \in]-1,1[}$$

Ex 6 Fiche 8

(1) Quand $x \to x_0 = 1$, $h = x_0 - 1 \to 0$. Alors,

$$e^x = e^{1+h} = e \cdot e^h = e \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{h^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e}{n!}(x-1)^n$$

(2) Remarquons que

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)'' = \left(\frac{1}{(1-x)^2}\right)' = 2\frac{1}{(1-x)^3}$$

Or, $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ pour $x \in]-1,1[$

Donc $\frac{1}{(1-x)^3} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right)'' = \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2}$ pour $x \in]-1,1[$

Et donc, pour $x \in]-1,1[$,

$$f(x) = \frac{1+x}{(1-x)^3} = (1+x)\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} + \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-1}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)(n+1)x^n + \sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)(n)x^n\right\}$$

$$= \frac{2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(n+2)(n+1)+(n+1)n}{2}x^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(n+1)(2n+2)}{2}x^n$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)^2 x^n = \boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)^2 x^n}$$ pour $x \in]-1,1[$

(3) Remarquons que $1 + x + x^2 = \frac{1-x^3}{1-x}$ pour $x \neq 1$

D'où $f(x) = \ln(1-x^3) - \ln(1-x)$

$$= -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{3n}}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}$$ pour $x \in]-1,1[$

La première somme ne fait intervenir que des puissances multiple de 3.

On décompose alors la deuxième somme comme suit :

$$f(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{n} + \left\{ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3n} x^{3n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3n+1} x^{3n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3n+2} x^{3n+2} \right\}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-2}{3n} x^{3n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3n+1} x^{3n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3n+2} x^{3n+2}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n \quad , \quad \text{où } b_n = \begin{cases} \frac{-2}{3k} & \text{si } n = 3k,\ k \in \mathbb{N}^* \\ \frac{1}{3k+1} & \text{si } n = 3k+1,\ k \in \mathbb{N} \\ \frac{1}{3k+2} & \text{si } n = 3k+2,\ k \in \mathbb{N} \end{cases} \quad \text{et } x \in]-1, 1[$$

(4) Dérivons l'expression $\frac{1-u}{1+u}$:

$$\frac{d}{du}\left(\frac{1-u}{1+u}\right) = \frac{-(1+u) - (1-u)}{(1+u)^2} = \frac{-2}{(1+u)^2}$$

Il s'en suit que

$$\frac{d}{du} \operatorname{Arctan}\left(\frac{1-u}{1+u}\right) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1-u}{1+u}\right)^2} \cdot \left(\frac{-2}{(1+u)^2}\right) = -\frac{1}{1+u^2}$$

$$= -\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u^{2n} \quad , \quad \text{pour } u \in]-1, 1[$$

En intégrant, il vient

$$\operatorname{Arctan}\left(\frac{1-u}{1+u}\right) = -\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{u^{2n+1}}{2n+1} + C \quad , \quad \text{pour } u \in]-1, 1[$$

Or $\operatorname{Arctan}(1) = \pi/4$. D'où,

$$\operatorname{Arctan}\left(\frac{1-u}{1+u}\right) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1} u^{2n+1} \quad , \quad \text{pour } u \in]-1, 1[$$

Et donc

$$\boxed{\operatorname{Arctan}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1} x^{4n+2}}$$