Un exemple d'application

Considérons l'équation différentielle

$$(E) \qquad y' - y = 0.$$

On connait l'ensemble des solutions

$$y(x) = C\exp(x), \text{ où } C \in \mathbb{R}.$$

On va retrouver l'ensemble des solutions en utilisant les séries entières.
Soit y une solution de (E) et supposons que y est la somme d'une série entière

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$

de rayon de convergence $R > 0$.
Par ce qui précède, pour tout $x \in]-R, R[$, on a

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}.$$

En remplaçant dans (E)

$$y'(x) - y(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Une réindexation nous donne

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n'=0}^{+\infty} (n'+1) a_{n'+1} x^{n'},$$

et comme n' est une "variable muette"

$$\sum_{n'=0}^{+\infty} (n'+1) a_{n'+1} x^{n'} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n.$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} y'(x) - y(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} ((n+1) a_{n+1} - a_n) x^n = 0, \end{aligned}$$

et on déduit

$$(n+1) a_{n+1} - a_n = 0, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Et donc la formule de récurrence

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{n}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

Par récurrence sur n,

$$a_n = \frac{a_0}{n!}$$

et donc

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_0}{n!} x^n = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n = a_0 \exp(x).$$

III. Développement d'une fonction en série entière

Soient $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, où (a_n) est réelle, et S sa somme

$$S : I =]-R, R[\to \mathbb{R}, \;\; S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Nous avons vu que S est indéfiniment dérivable (de classe C^∞) sur I. De plus

$$S(0) = a_0, \; S'(0) = a_1, \; S''(0) = 2a_2,$$

$$S^{(p)}(0) = \sum_{n \geq p} n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)a_n 0^{n-p} = p! a_p$$

et donc, on peut exprimer a_n en fonction de $S^{(n)}(0)$

$$a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!}.$$

Définition 1

Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle contenant 0 et $f : I \to \mathbb{R}$ une application.

On dit que f est développable en série entière autour de 0, s'il existe une série entière $\sum a_n x^n$, où (a_n) est réelle, de rayon de convergence R non nul et $r \in]0, R[$ vérifiant

$$(1) \;\;]-r, r[\subseteq I, \qquad (2) \;\; \forall x \in]-r, r[, \; f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

La série entière $\sum a_n x^n$ est appelée le développement en série entière de f autour de 0.

Définition 2

On dit que $f : I \to \mathbb{R}$ est développable en série entière autour de x_0 si la fonction $x \mapsto f(x - x_0)$ est développable en série entière autour de 0.

Conséquence

Si f est développable en série entière autour de 0, alors f est de classe C^∞ sur un voisinage de 0 et

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Et donc, sur un voisinage de 0,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Conséquence

De même, si f est développable en série entière autour de x_0, alors f est de classe C^∞ sur un voisinage de x_0 et

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Et donc, sur un voisinage de x_0,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$$

En particulier le développement en série entière est unique.

Remarque

Toute fonction développable en série entière autour de 0 est de classe C^∞ sur un voisinage de 0. Mais la réciproque est fausse. Il existe des fonctions de classe C^∞ sur un voisinage de 0 qui ne sont pas développables en série entière autour de 0.

Exemple : l'application f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \exp(\frac{-1}{x^2}) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, en particulier autour de 0, et pour laquelle la somme de la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

est la fonction nulle.

Définition 3

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une application de classe C^∞, où I est un intervalle qui est un voisinage de x_0. On appelle série de Taylor-Maclaurin de f autour de x_0, la série

$$\sum \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$$

Remarque

La série de Taylor-Maclaurin n'est pas forcément convergente. Comme signalé plus haut, il peut arriver que sa somme ne coincide pas avec f.

Proposition 1 (Condition suffisante)

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une application de classe C^∞, où I est un intervalle qui est un voisinage de x_0.

Supposons que f est de classe C^∞ sur I et qu'il existe une constante M telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, \quad |f^{(n)}(x)| \leq M.$$

Alors f est développable en série entière autour de x_0 et donc sur un voisinage de x_0, on a

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Preuve. Soit $\epsilon > 0$ avec $J = [x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon] \subseteq I$. On applique la formule de Taylor-Lagrange à f entre x_0 et $x \in J$ à l'ordre m. Donc il existe $c_m \in [x_0, x]$ tel que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{n=m} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(m+1)}(c_m)}{(m+1)!}(x - x_0)^m.$$

D'où

$$\left|f(x) - \sum_{n=0}^{n=m} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n\right| \leq \frac{M}{(m+1)!}\epsilon^m.$$

Comme le dernier terme tend vers 0 quand m tend vers $+\infty$, on déduit que la série $\sum \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ converge uniformément vers f sur J. On vérifie bien que la convergence est normale et donc absolue et par conséquent le rayon de convergence $\geq \epsilon$. $\square$

Exemple 1

Considérons la fonction exponentielle $f(x) = \exp(x)$. Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\epsilon > 0$. On a

$$f^{(n)}(x) = \exp(x), \quad f^{(n)}(x) \leq \exp(x_0 + \epsilon) \text{ pour tout } x \in [x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon].$$

Donc f est développable en série entière autour de x_0 et

$$\exp(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{\exp(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

En variant ϵ, on déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\exp(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{\exp(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Exemple 2

Soit f la fonction définie sur $I =]-1, 1[$ par

$$f(x) = \ln(1 + x).$$

Alors f est de classe C^∞ sur I et

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x}.$$

On a pour tout $x \in I$,

$$\frac{1}{1 + x} = \frac{1}{1 - (-x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n.$$

Exemple 2

Par intégration, on obtient

$$\int_0^t \frac{1}{1+x}\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^t (-1)^n x^n\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{t^{n+1}}{n+1}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{t^n}{n}.$$

Donc pour tout $x \in I$,

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$$

ce qui est le développement en série entière de $\ln(1+x)$ autour de 0.

Considérons l'équation différentielle

$$(E) \qquad xy' + y = 4\cos(\sqrt{x}).$$

Supposons que (E) admet une solution y développable en série entière $\sum a_n x^n$, autour de 0, de rayon de convergence $R > 0$. On a alors sur $]-R, R[$,

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$

et en replaçant dans (E)

$$xy'(x) + y(x) = x\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_n x^n.$$

On a

$$4\cos(\sqrt{x}) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{4(-1)^n}{(2n)!}x^n.$$

D'où

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left((n+1)a_n - \frac{4(-1)^n}{(2n)!}\right)x^n = 0$$

et par unicité d'un développement en série entière, on déduit que y est solution de (E) si et seulement si

$$a_n = \frac{4(-1)^n}{(n+1)(2n)!} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Donc la solution recherchée est

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4(-1)^n}{(n+1)(2n)!} x^n.$$

En utilisant la règle de D'Alembert, on montre que le rayon de convergence est $R = +\infty$ et donc la solution obtenue est définie sur $\mathbb{R}$.

IV. Séries trigonométriques, séries de Fourier

IV. 1. Introduction

Joseph Fourier avait introduit l'équation de la chaleur et avait étudié les solutions de cette équation qu'on peut obtenir comme sommes de séries trigonométriques qui depuis portent son nom : séries de Fourier.

Les séries de Fourier constitue un outil important dans l'étude des fonctions périodiques et dans le traitement du signal. Considérons une barre homogène de longueur finie L. On s'intéresse à déterminer la température $u(x,t)$ de la barre au point x et à l'instant t.

On considère des des conditions initiales, on suppose que la température est nulle aux extrémités et qu'à l'instant $t = 0$ elle est donnée par une fonction $\varphi : [0, L] \to \mathbb{R}$.
L'équation qui régit la température $u(x,t)$ en chaque point x à un instant $t > 0$ est l'équation de la chaleur à une dimension

$$(E) \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t),$$

où D est le coefficient de diffusion.
En cherchant des solutions particulières de la forme $u(x,t) = f(x)g(t)$, on aboutit après calcul aux solutions de (E) de la forme

$$u_n(x,t) = b_n \sin(\frac{n\pi}{L}x)\exp(\frac{-\pi^2 n^2}{L^2}Dt)$$

où $n \in \mathbb{N}$ et $b_n \in \mathbb{R}$.
Ces solutions ne satisfont pas forcément les conditions initiales.

Comme l'équation E est linéaire, on constate que la somme des fonctions de la forme précédente reste encore une solution de E. En passant aux sommes d'un nombre infini, donc aux séries, on est amené à chercher des solutions de la forme

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \sin(\frac{n\pi}{L}x)\exp(\frac{-\pi^2 n^2}{L^2}Dt),$$

$$\varphi(x) = u(x,0) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \sin(\frac{n\pi}{L}x).$$

Les séries de Fourier sont des séries de fonctions, qui servent à décomposer les fonctions périodiques comme une "combinaison linéaire" de fonctions périodiques plus simples, de la forme $\cos(nx)$ ou $\sin(nx)$.

Donc comme la somme d'une série de la forme

$$\sum(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)).$$

IV. 2. Séries trigonométriques

Définition 1

On appelle série trigonométrique toute série de fonctions de la forme

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1}(a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)),$$

où $x \in \mathbb{R}$, $\omega > 0$ et (a_n) et (b_n) sont des suites réelles ou complexes.

On dit que la série est réelle si (a_n) et (b_n) sont des suites réelles.

Rappel

Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite T-périodique si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x+T) = f(x)$.

Le plus petit T vérifiant la propriété précédente (s'il existe) est appelé la période de f.

Exemple

La fonction $x \mapsto \cos(n\omega x)$ est périodique de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$.
On a

$$\cos(n\omega(x + 2k\pi/\omega)) = \cos(n\omega x + 2k\pi) = \cos(n\omega x).$$

Supposons que la série

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1}(a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x))$$

converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers f

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1}(a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x))$$

Comme les fonctions sin et cos sont 2π-périodiques, on déduit que la somme f est périodique. En effet, on a

$$\cos(n\omega(x + 2k\pi/\omega)) = \cos(n\omega x), \ \sin(n\omega(x + 2k\pi/\omega)) = \sin(n\omega x)$$

et donc $f(x + \frac{2k\pi}{\omega}) = f(x)$. Donc f est de période $T = 2\pi/\omega$.

Proposition 1

Si les séries numériques $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes alors la série trigonométrique

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1}(a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x))$$

est normalement convergente sur $\mathbb{R}$.

En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$|a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)| \leq |a_n| + |b_n|.$$

Proposition 2

Si les suites numériques (a_n) et (b_n) sont décroissantes et tendent vers 0, alors la série

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1}(a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x))$$

est convergente pour tout $x \in \mathbb{R}$ avec $x \neq \frac{2k\pi}{\omega}$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Considérons la série trigonométrique réelle

$$(1) \qquad \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1}(a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)).$$

En utilisant les formules d'Euler

$$\cos(n\omega x) = \frac{e^{in\omega x} + e^{-in\omega x}}{2}, \quad \sin(n\omega x) = \frac{e^{in\omega x} - e^{-in\omega x}}{2i}$$

la série (1) s'écrit :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1}\left(a_n \frac{e^{in\omega x} + e^{-in\omega x}}{2} + b_n \frac{e^{in\omega x} - e^{-in\omega x}}{2i}\right)$$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1}\left(e^{in\omega x}\frac{a_n - ib_n}{2} + e^{-in\omega x}\frac{a_n + ib_n}{2}\right).$$

Posons

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \text{ et } c_{-n} = \bar{c}_n = \frac{a_n + ib_n}{2}.$$

Alors la série (1) devient

$$\begin{aligned} & c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(c_n e^{in\omega x} + c_{-n}e^{-in\omega x}) \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{in\omega x} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}e^{-in\omega x}) \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{in\omega x} + \sum_{-\infty}^{n=-1} c_n e^{in\omega x} \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{in\omega x}. \end{aligned}$$

La dernière expression est appelée la forme complexe de la série trigonométrique (1).

Considérons la série trigonométrique réelle

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1}(a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)).$$

convergeant uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction f

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1}(a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)). \tag{1}$$

On souhaite calculer les coefficients a_n et b_n en fonction de f comme dans le cas des fonctions développables en séries entières.
Soit $p \in \mathbb{N}$, fixé. En multipliant les deux côtés de l'égalité (1) par $\cos(p\omega x)$ on a

$$f(x)\cos(p\omega x) = \frac{a_0}{2}\cos(p\omega x)$$

$$+\sum_{n\geq 1} a_n \cos(n\omega x)\cos(p\omega x) + b_n \sin(n\omega x)\cos(p\omega x)$$

On multiplie aussi les deux côtés de l'égalité (1) par $\sin(p\omega x)$

$$f(x)\sin(p\omega x) = \frac{a_0}{2}\sin(p\omega x)$$

$$+\sum_{n\geq 1} a_n \cos(n\omega x)\sin(p\omega x) + b_n \sin(n\omega x)\sin(p\omega x)$$

Comme la série converge uniformément, on peut intégrer terme par terme

$$\int_0^{2\pi/\omega} f(x)\cos(p\omega x)\ dx =$$

$$\int_0^{2\pi/\omega} \frac{a_0}{2}\cos(p\omega x)\ dx$$

$$+\sum_{n\geq 1} a_n \int_0^{2\pi/\omega} \cos(n\omega x)\cos(p\omega x)\ dx + b_n \int_0^{2\pi/\omega} \sin(n\omega x)\cos(p\omega x)\ dx.$$

$$\int_0^{2\pi/\omega} f(x)\sin(p\omega x)\ dx =$$

$$\int_0^{2\pi/\omega} \frac{a_0}{2}\sin(p\omega x)\ dx$$

$$+\sum_{n\geq 1} a_n \int_0^{2\pi/\omega} \cos(n\omega x)\sin(p\omega x)\ dx + b_n \int_0^{2\pi/\omega} \sin(n\omega x)\sin(p\omega x)\ dx.$$

Il reste donc à calculer

$$\int_0^{2\pi/\omega} \cos(n\omega x)\cos(p\omega x)\ dx, \quad \int_0^{2\pi/\omega} \sin(n\omega x)\sin(p\omega x)\ dx.$$

Exercice

Montrer que

$$\int_0^{2\pi/\omega} \cos(n\omega x)\cos(p\omega x)\, dx = \begin{cases} 0 & \text{si } p \neq n \\ \pi/\omega & \text{si } p = n \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi/\omega} \sin(n\omega x)\sin(p\omega x)\, dx = \begin{cases} 0 & \text{si } p \neq n \\ \pi/\omega & \text{si } p = n \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi/\omega} \cos(n\omega x)\sin(p\omega x)\, dx = 0.$$

Après substitution, on obtient donc

$$a_n = \frac{\omega}{\pi}\int_0^{2\pi/\omega} f(x)\cos(n\omega x)\, dx,$$

$$b_n = \frac{\omega}{\pi}\int_0^{2\pi/\omega} f(x)\sin(n\omega x)\, dx.$$

Considérons la série trigonométrique réelle

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1}(a_n\cos(n\omega x) + b_n\sin(n\omega x)).$$

convergeant uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction f

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1}(a_n\cos(n\omega x) + b_n\sin(n\omega x)).$$

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$a_n = \frac{\omega}{\pi}\int_0^{2\pi/\omega} f(x)\cos(n\omega x)\, dx,$$

$$b_n = \frac{\omega}{\pi}\int_0^{2\pi/\omega} f(x)\sin(n\omega x)\, dx.$$

En écriture complexe

On obtient

$$c_n = \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega} f(x)e^{in\omega x}\, dx, \text{ pour tout } n \in \mathbb{Z}.$$

Définition 2

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction T-périodique où on pose $T = \frac{2\pi}{\omega}$, intégrable sur tout intervalle fermé et borné. On appelle série de Fourier associée à f, la série trigonométrique

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1}(a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)),$$

où

$$a_n = \frac{\omega}{\pi}\int_0^{2\pi/\omega} f(x)\cos(n\omega x)\ dx,$$

$$b_n = \frac{\omega}{\pi}\int_0^{2\pi/\omega} f(x)\sin(n\omega x)\ dx.$$

On peut écrire les coefficients en fonction de la période T

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^{T} f(x)\cos(n\frac{2\pi}{T}x)\ dx,$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^{T} f(x)\sin(n\frac{2\pi}{T}x)\ dx.$$

On peut se demander :

- La série de Fourier associée à f est-elle convergente ?
- En cas de convergence, peut-on dire que la série converge vers f ?

Notation

Si la série de Fourier associée à f converge simplement on note sa somme Sf.

$$Sf(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1}(a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)).$$