

# Chapitre 2 : Suites et séries numériques et de fonctions

Mathématiques 3, 2019

## II. Suites et séries de fonctions

Soit  $f : D \subseteq \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$  une application bornée. On note

$$\|f\| = \sup_{x \in D} |f(x)|$$

qu'on appelle **la norme de la convergence uniforme** de  $f$ .

Remarquons que si  $(f_n)$  est une suite de fonctions, alors  $(f_n)$  converge uniformément vers la fonction  $f$  si et seulement si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\| = 0$ .

## Théorème 1

Si une suite de fonctions  $(f_n)$  **converge uniformément** sur  $D$  vers une fonction  $f$  et si chaque  $f_n$  est **continue** sur  $D$ , alors  $f$  est **continue** sur  $D$ .

Plus précisément, si  $(f_n)$  **converge uniformément** sur  $D$  vers  $f$  et si chaque  $f_n$  est continue en  $x_0 \in D$ , alors  $f$  est continue en  $x_0$  et on a

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) \right).$$

## Remarque

Attention, la convergence simple n'est pas suffisante pour déduire la continuité de la limite (simple). Reprenons la suite

$$f_n : \begin{cases} [0, +\infty[ & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto f_n(x) = \frac{nx}{1+nx}. \end{cases}$$

dont la limite simple est  $f : D = [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

Chaque  $f_n$  est continue sur  $D$  (en particulier en 0), alors que  $f$  n'est pas continue en 0.

## Théorème 2

Soient  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ . Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions **Riemann-intégrables** sur  $[a, b]$  et **convergeant uniformément** sur  $[a, b]$  vers une fonction  $f$ . Alors

- $f$  est Riemann-intégrable sur  $[a, b]$ ,
- en posant, pour tout  $x \in [a, b]$  et tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$F_n(x) = \int_a^x f_n(t) dt, \quad F(x) = \int_a^x f(t) dt,$$

la suite  $(F_n)$  converge uniformément vers  $F$  sur  $[a, b]$ .

En particulier

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) dt.$$

## Exemple 1 (suite)

Reprenons la suite (où  $a > 0$ )

$$f_n : \begin{cases} [a, +\infty[ & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto f_n(x) = \frac{nx}{1 + nx}. \end{cases}$$

dont la limite uniforme est  $f : D = [a, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 1$ .

Sur  $[a, 1]$  on a

$$F_n(x) = \int_a^x f_n(t) dt = (x - a) - \frac{\ln(1 + nx)}{n} + \frac{\ln(1 + na)}{n}, \quad F(x) = x - a,$$

et on a bien  $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n = F$  uniformément.

## Théorème 3

Soient  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ . Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions dérivables de  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}$ . On suppose :

- que la suite  $(f'_n)$  converge uniformément sur  $[a, b]$  vers une fonction  $g$ ,
- qu'il existe  $x_0 \in [a, b]$  tel que la suite  $(f_n(x_0))$  converge.

Alors la suite  $(f_n)$  converge uniformément sur  $[a, b]$  vers une fonction  $f$  dérivable telle que  $f' = g$ .

En particulier, si chaque  $f_n$  est de classe  $C^1$ , il en est de même de  $f$ .

## II. 2. Séries de fonctions

De la même manière qu'on avait défini les séries numériques à partir des suites numériques, on définit les **séries de fonctions** à partir des suites de fonctions.

Soit  $(f_n)_n$  une suite de fonctions. Donc on s'intéresse à la somme

$$f_0(x) + f_1(x) + \cdots + f_n(x) + \cdots$$

Si  $x$  est fixé, la suite  $(f_n(x))_n$  est une suite numérique et donc on peut étudier la série numérique  $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$ .

## Définition 1

Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions (réelle ou complexe). On appelle **série de fonctions** de terme général  $f_n$  et on note  $\sum f_n$ , la **suite de fonctions**  $(S_n)$  définie par

$$S_n = \sum_{k=0}^n f_k = f_0 + f_1 + \cdots + f_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

On appelle  $S_n$  la **la somme partielle d'ordre  $n$**  de la série  $\sum f_n$ .

## Remarque

On a

$$S_n(x) = f_0(x) + \cdots + f_n(x).$$

## Définition 2 (Convergence simple)

Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions définies sur  $D$ . On dit que la série  $\sum f_n$  **converge simplement sur  $D$**  si la suite des sommes partielles  $(S_n)$  converge simplement sur  $D$ .

D'une manière équivalente : la série  $\sum f_n$  converge simplement sur  $D$  si pour tout  $x \in D$ , la série numérique  $\sum f_n(x)$  est convergente.

**Notation.** Si  $\sum f_n$  converge simplement sur  $D$  vers la fonction  $s$ , on note

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = s(x).$$

Exemple 1. Soit  $(f_n)_n$  la suite de fonctions

$$f_n : \begin{cases} D = ]0, +\infty[ & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{3^n}. \end{cases}$$

Étudions la convergence simple de la série  $\sum f_n$ . Fixons  $x \in \mathbb{R}$ . On a

$$\left| \frac{\sin(nx)}{3^n} \right| \leq \frac{|\sin(nx)|}{3^n} \leq \frac{1}{3^n}.$$

Comme la série numérique  $\sum \frac{1}{3^n}$  est convergente (c'est une série géométrique convergente), on déduit que la série numérique  $\sum \frac{\sin(nx)}{3^n}$  est absolument convergente.

Donc la série de fonctions  $\sum f_n$  converge simplement sur  $\mathbb{R}$ .

# Convergence simple

Exemple 2 (séries géométriques). Soit  $\sum f_n$  la série de fonctions de terme général  $f_n(z) = z^n$ . La suite  $(f_n(z))$  est une suite géométrique de raison  $z$  et on a

$$\text{si } z \neq 1, S_n(z) = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}.$$

$$\text{si } z = 1, S_n(z) = n + 1.$$

La série  $\sum f_n(z)$  converge si et seulement si  $0 \leq |z| < 1$ .

Donc la série  $\sum f_n$  converge simplement sur le disque  $\{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ . Dans ce cas, on peut calculer sa limite simple :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1 - z}.$$

## Définition 3 (Convergence uniforme)

Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions définies sur  $D$ . On dit que la série  $\sum f_n$  **converge uniformément sur  $D$**  si la suite de fonctions des sommes partielles  $(S_n)$  converge uniformément sur  $D$ .

## Proposition 1

Toute série de fonctions qui converge uniformément sur  $D$  converge simplement sur  $D$ .

## Exemple 2 : séries géométriques

Reprenons  $\sum f_n$  la série de fonctions de terme général  $f_n(z) = z^n$ . Sur le disque  $\{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ , on a

$$S_n(z) - S(z) = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} - \frac{1}{1 - z} = \frac{-z^{n+1}}{1 - z},$$

et donc  $|S_n(z) - S(z)| = \frac{|z|^{n+1}}{|1 - z|} \leq \frac{|z|^{n+1}}{|1 - |z||}$ .

Comme  $\lim_{z \rightarrow 1} \frac{|z|^{n+1}}{|1 - z|} = +\infty$ , la série  $\sum f_n(z)$  ne converge pas uniformément sur le disque  $\{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ .

## Exemple 2 : séries géométriques

En revanche, elle converge uniformément sur tout disque de la forme  $\{z \in \mathbb{C}; |z| \leq r\}$  où  $0 \leq r < 1$ . En effet,

$$|S_n(z) - S(z)| \leq \frac{|z|^{n+1}}{|1 - |z||} \leq \frac{r^{n+1}}{|1 - r|}$$

et comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{r^{n+1}}{|1 - r|} = 0$ , on déduit la convergence uniforme.

## Définition 4

Soit  $\sum f_n$  une série de fonctions qui converge simplement vers  $S$ . On appelle **suite des restes partiels**, la suite  $(R_n)_n$  de fonctions définie par

$$R_n(x) = S(x) - S_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x).$$

$R_n$  est appelé le **reste d'ordre  $n$** .

## Remarque

Remarquons que  $(R_n)$  est bien définie et que pour tout  $x \in D$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0$$

et donc en particulier  $(R_n)_n$  converge simplement vers la fonction nulle.

## Proposition 2

Soit  $\sum f_n$  une série de fonctions qui converge simplement sur  $D$ . Alors elle converge **uniformément** sur  $D$  si et seulement si la suite des restes partiels  $(R_n)$  converge **uniformément** sur  $D$  vers la fonction nulle.

Le critère précédent est particulièrement utile lorsqu'on peut majorer le reste d'ordre  $n$ . C'est le cas, par exemple, des séries alternées.

## Exemple 3

Soit  $\sum f_n$  la série de terme général

$$f_n : \begin{cases} D = ]0, +\infty[ & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto f_n(x) = \frac{(-1)^n}{x+n}. \end{cases}$$

Pour tout  $x \in \mathbb{R}^{+*}$  fixé, la série numérique  $\sum u_n(x)$  de terme général  $u_n(x) = \frac{(-1)^n}{x+n}$  est une série alternée qui satisfait les conditions de la règle des séries alternées :  $|u_n(x)|$  est décroissante et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = 0$ .  
Donc la série  $\sum f_n$  converge simplement sur  $\mathbb{R}^{+*}$ .

## Exemple 3

Comme  $\sum u_n(x)$  satisfait les conditions de la règle des séries alternées, nous avons la majoration

$$|R_n(x)| \leq |u_{n+1}(x)| = \frac{1}{x+n+1} \leq \frac{1}{n+1}$$

et donc

$$|R_n(x) - 0| \leq \frac{1}{n+1}.$$

On déduit la convergence uniforme de  $(R_n)$  vers 0.

Donc la série de fonctions  $\sum f_n$  converge uniformément sur  $\mathbb{R}^{+*}$ .

## Définition 5

Soit  $\sum f_n$  une série de fonctions. On dit que  $\sum f_n$  **converge normalement sur  $D$**  si la série numérique à termes positifs  $\sum \|f_n\|$  est convergente.

## Définition 6

Soit  $\sum f_n$  une série de fonctions. On dit que  $\sum f_n$  **converge absolument sur  $D$**  si la série de fonctions  $\sum |f_n|$  est simplement convergente sur  $D$ .

## Remarques

- Pour montrer qu'il y a convergence normale, on cherche à majorer  $\|f_n\|$  par un réel  $u_n$  tel que  $\sum u_n$  soit convergente.
- Pour montrer qu'il n'y a pas convergence normale, on cherche à minorer  $\|f_n\|$  par un réel  $u_n$  tel que  $\sum u_n$  soit divergente.

## Exemple 1 (suite)

Reprenons  $(f_n)_n$  la suite de fonctions

$$f_n : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{3^n}. \end{cases}$$

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a

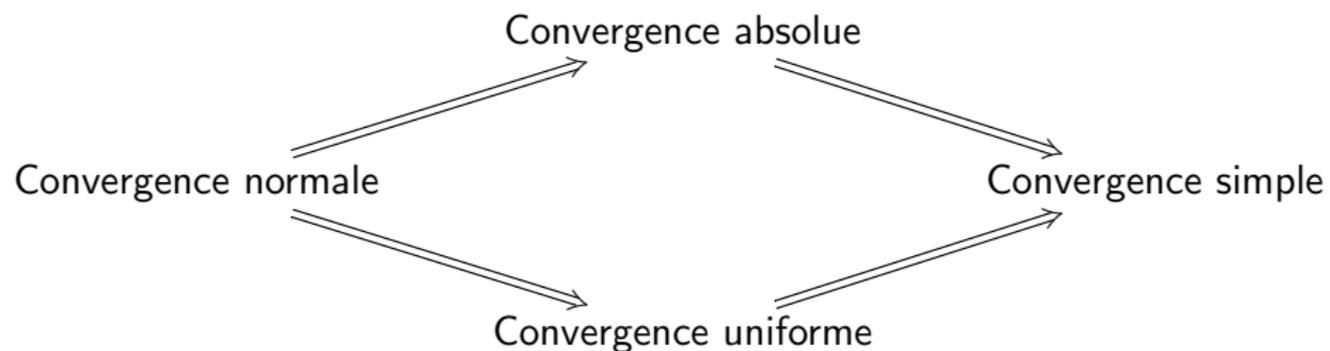
$$\left| \frac{\sin(nx)}{3^n} \right| \leq \frac{|\sin(nx)|}{3^n} \leq \frac{1}{3^n}$$

et donc

$$\|f_n\| \leq \frac{1}{3^n}.$$

Comme la série numérique  $\sum \frac{1}{3^n}$  est convergente, on déduit que la série de fonctions  $\sum \frac{\sin(nx)}{3^n}$  est normalement convergente.

# Liens entre les différentes formes de convergence



## Remarque

La convergence uniforme n'entraîne pas la convergence absolue. Reprenons la série  $\sum f_n$  de terme général

$$f_n : \begin{cases} D = ]0, +\infty[ & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto f_n(x) = \frac{(-1)^n}{x+n}. \end{cases}$$

Nous avons vu qu'elle est uniformément convergente. Mais elle n'est pas absolument convergente. En effet,

$$|f_n(x)| = \frac{1}{x+n} \sim \frac{1}{n}$$

et la série  $\sum \frac{1}{n}$  n'est pas convergente et donc  $\sum |f_n|$  n'est pas convergente.

## Proposition 3

Soit  $\sum f_n$  une série de fonctions.

- Si  $\sum f_n$  converge simplement, alors  $(f_n)$  converge simplement vers la fonction nulle.
- Si  $\sum f_n$  converge uniformément, alors  $(f_n)$  converge uniformément vers la fonction nulle.
- Si  $\sum f_n$  converge normalement, alors  $(\|f_n\|)$  converge vers 0.

Comme les séries est un cas particulier des suites de fonctions ...

## Théorème 1

Si une série de fonctions  $\sum(f_n)$  **converge uniformément** sur  $D$  vers une fonction  $S$  et si chaque  $f_n$  est continue sur  $D$ , alors  $S$  est continue sur  $D$ .

Plus précisément, si  $\sum f_n$  **converge uniformément** sur  $D$  vers  $S$  et si chaque  $f_n$  est continue en  $x_0 \in D$ , alors  $S$  est continue en  $x_0$ .

On a

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) \right).$$

## Théorème 2

Soient  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ . Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions **Riemann-intégrables** sur  $[a, b]$ . Supposons que  $\sum f_n$  **converge uniformément** sur  $[a, b]$  vers une fonction  $S$ . Alors

- $S$  est Riemann-intégrable sur  $[a, b]$ ,
- en posant, pour tout  $x \in [a, b]$  et tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$F_n(x) = \int_a^x f_n(t) dt, \quad F(x) = \int_a^x S(t) dt,$$

la série  $\sum F_n$  converge uniformément vers  $F$  sur  $[a, b]$ .

On a, en particulier

$$\int_a^b \left( \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \int_a^b f_n(t) dt \right).$$

## Théorème 3

Soient  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ . Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions dérivables de  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}$ . On suppose :

- que la série  $\sum f'_n$  converge uniformément sur  $[a, b]$  vers une fonction  $g$ ,
- qu'il existe  $x_0 \in [a, b]$  tel que la série  $\sum f_n(x_0)$  converge.

Alors la suite  $\sum f_n$  converge uniformément sur  $[a, b]$  vers une fonction  $f$  dérivable telle que  $f' = g$ .

Ce qu'on peut formuler

$$\left( \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n(t).$$

Si chaque  $f_n$  est de classe  $C^1$ , il en est de même de  $f$ .

## Exercice récapitulatif

Soit  $\sum f_n$  la série de fonctions de terme général

$$f_n : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto f_n(x) = \frac{nx}{1+n^3x^2}. \end{cases}$$

- (1) Soit  $a > 0$ . Montrer que  $\sum f_n$  converge normalement sur  $D_a = ]-\infty, -a] \cup [a, +\infty[$ . Y-a-t-il convergence normale sur  $\mathbb{R}$  ?
- (2) Soit  $S$  la limite de la série. Montrer que  $S$  est continue sur  $]0, +\infty[$ .
- (3) Montrer que  $S$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^*$  et écrire  $S'$  comme la somme d'une série.
- (4) Montrer que  $S$  est Riemann-Intégrable sur  $[1, 2]$  et écrire  $\int_1^2 S(x) dx$  comme la somme d'une série.

## Corrigé à lire chez soi

(1) On a

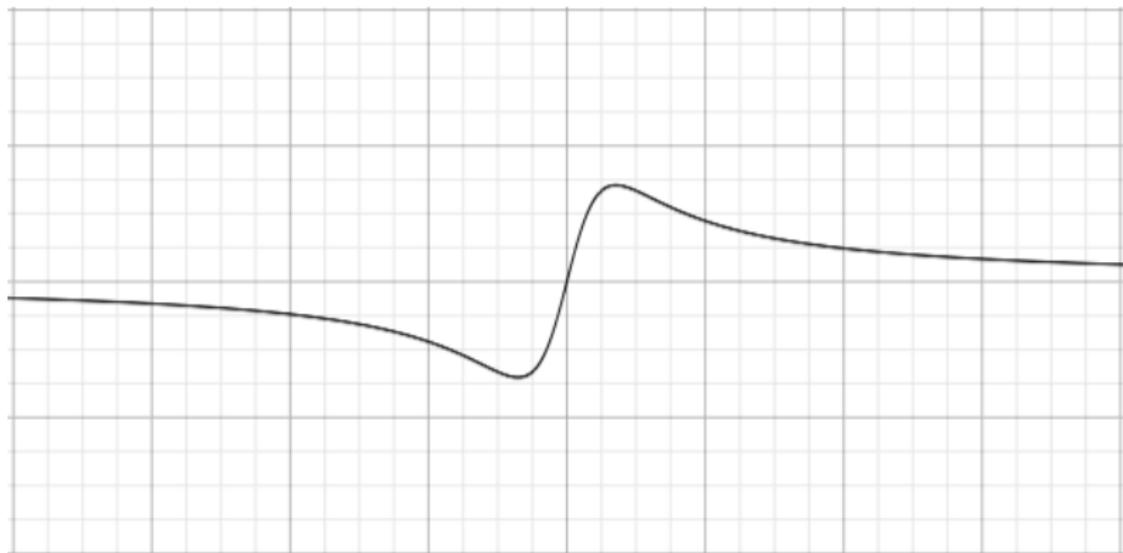
$$f'_n(x) = \frac{n(1 - n^3x^2)}{(1 + n^3x^2)^2}, \quad f'_n(x) = 0 \text{ ssi } x = \pm \frac{1}{\sqrt{n^3}}$$

$$f'_n(x) \leq 0 \text{ ssi } |x| \geq \frac{1}{\sqrt{n^3}} \text{ ssi } x \in ] -\infty, -\frac{1}{\sqrt{n^3}}] \cup [\frac{1}{\sqrt{n^3}}, +\infty[$$

Donc

$$f_n \text{ est décroissante sur } ] -\infty, -\frac{1}{\sqrt{n^3}}] \cup [\frac{1}{\sqrt{n^3}}, +\infty[,$$

$$\text{et croissante sur } [-\frac{1}{\sqrt{n^3}}, \frac{1}{\sqrt{n^3}}].$$



Pour  $n$  assez grand,

$$\left[-\frac{1}{\sqrt{n^3}}, \frac{1}{\sqrt{n^3}}\right] \subseteq [-a, a], \quad \|f_n\|_D = \sup_{D_a} |f_n(x)| = f_n(a) = \frac{na}{1+n^3a^2} \sim \frac{1}{an^2}.$$

Donc la série converge normalement sur  $D_a$ .

Sur  $\mathbb{R}$ , on a

$$\|f_n\|_{\mathbb{R}} = \sup_{\mathbb{R}} |f_n(x)| = f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n^3}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

La série  $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$  est une série de Riemann divergente. On déduit que la série  $\sum f_n$  n'est pas normalement convergente sur  $\mathbb{R}$ .

**(2)** Soit  $x_0 \in ]0, +\infty[$  et  $0 < a < x_0$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la fonction  $f_n$  est continue en  $x_0$ . La série  $\sum f_n$  est normalement convergente et donc uniformément convergente sur  $[a, +\infty[$ . En conclu que sa limite  $S$  est continue en  $x_0$ .

**(3)** Pour pouvoir appliquer le théorème de la dérivation des séries, on étudier la convergence uniforme de la série  $\sum f'_n$ . On a

$$f'_n(x) = \frac{n(1 - n^3x^2)}{(1 + n^3x^2)^2}.$$

Soient  $a, b \in \mathbb{R}$  tels que  $a < b < 0$  ou  $0 < a < b$ . On a, pour tout  $x \in [a, b]$ ,

$$\|f'_n(x)\| \leq \frac{n(1 + n^3b)}{(1 + n^3a^2)^2}, \quad \text{si } 0 < a < b,$$

$$\|f'_n(x)\| \leq \frac{n(1 + n^3|a|)}{(1 + n^3|b|^2)^2}, \quad \text{si } a < b < 0.$$

Or

$$\frac{n(1 + n^3\alpha)}{(1 + n^3\beta^2)^2} \sim \frac{\alpha}{\beta^4 n^2}$$

et donc la série  $\sum f'_n$  est uniformément convergente sur  $[a, b]$ .  
Comme  $\sum f_n$  est normalement convergente, elle est simplement convergente et donc il existe  $x_0 \in [a, b]$  tel que la série  $\sum f_n(x_0)$  est convergente.

Par conséquent,  $S$  est dérivable sur  $[a, b]$  et pour tout  $x \in [a, b]$ , on a

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(1 - n^3x^2)}{(1 + n^3x^2)^2}.$$

**(4)** La série  $\sum f_n$  est uniformément convergente sur  $[1, 2]$  et donc  $S$  est Riemann-Intégrable sur  $[1, 2]$ . On a

$$\int_1^2 f_n(x) dx = \frac{1}{2n^2} \ln \left( \frac{1 + 4n^3}{1 + n^3} \right),$$

et donc

$$\int_1^2 S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n^2} \ln \left( \frac{1 + 4n^3}{1 + n^3} \right).$$

### III. Séries entières

## Définition 1

Une **série entière** est une série de fonctions de la forme

$$\sum_{n \geq 0} a_n z^n$$

où  $(a_n)$  est une suite réelle ou complexe.

La somme est la fonction qui à tout complexe  $z$ , pour lequel la série  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  converge, associe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

## Exemple 1

$$\sum_{n \geq 0} z^n, \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} z^n, \sum_{n \geq 0} \sin(n) z^n, \sum_{n \geq 0} i^n z^n$$

## Remarque

- Une série entière est un cas particulier des séries de fonctions où dans ce cas la terme général est de la forme  $f_n(z) = a_n z$ .
- Donc tout ce qu'a été fait précédemment sur les séries de fonctions s'applique aux séries entières. En particulier on peut étudier la convergence simple, uniforme, ...

Les séries entières sont extrêmement importantes en analyse et dans l'étude des fonctions et des solutions des équations différentielles.

Par exemple, beaucoup de fonctions peuvent s'écrire comme somme de séries entières.

Les séries entières possèdent beaucoup de propriétés remarquables qu'on peut étudier à l'aide d'un réel  $R \geq 0$ , appelé **rayon de convergence**.

## Théorème 1

Soit  $(a_n)$  une suite de réels ou de complexes. Posons

$$R = \sup\{r \geq 0 \mid \text{la suite } (|a_n|r^n)_n \text{ est majorée}\}.$$

Alors  $R$  est l'unique réel  $R \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$  possédant les deux propriétés suivantes :

- pour tout  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $|z| < R$ , la série  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  est absolument convergente.
- pour tout  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $|z| > R$ , la série  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  est grossièrement divergente.

## Définition 2

- Le réel  $R \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$  défini dans le théorème précédent est appelé le **rayon de convergence** de la série  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ .
- Le disque ouvert  $\mathring{D}_R = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$  est appelé le disque de **convergence de la série**  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ .

## Remarque

Pour les  $z \in \mathbb{C}$ , tels que  $|z| = R$ , on ne peut rien conclure de général sur la convergence de la série  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ . Il faut étudier le cas  $|z| = R$  en fonction de la série considérée.

## Exemple 2

Considérons la série

$$\sum_{n \geq 0} z^n.$$

Nous avons vu que si  $|z| < 1$ , la série  $\sum_{n \geq 0} z^n$  converge et si  $|z| > 1$ , elle diverge.

Donc le rayon de convergence de la série  $\sum_{n \geq 0} z^n$  est 1.

Remarquons que pour  $|z| = 1$ , la série  $\sum_{n \geq 0} z^n$  diverge.

## Proposition 2 (Règle de D'Alembert)

Soit  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  une série entière. Supposons que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \ell \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}.$$

Alors le rayon de convergence est donné par

$$R = \frac{1}{\ell}, \text{ avec les conventions } \frac{1}{0} = +\infty \text{ et } \frac{1}{+\infty} = 0.$$

## Exemple 3

Considérons la série entière

$$\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}.$$

On a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

et donc le rayon de convergence est  $+\infty$ .

L'application

$$z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

est appelée **l'exponentielle complexe** et est notée  $\exp(z)$  ou  $e^z$ .

## Proposition 3 (Règle de Cauchy)

Soit  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  une série entière. Supposons que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}.$$

Alors

$$R = \frac{1}{\ell}, \text{ avec les conventions } \frac{1}{0} = +\infty \text{ et } \frac{1}{+\infty} = 0.$$

## Exemple 4

Considérons la série entière

$$\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n^n}.$$

On a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

et donc le rayon de convergence est  $+\infty$ .

## Proposition 1

Soit  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  une série entière de rayon de convergence  $R > 0$ .

- Pour tout  $0 < r < R$ ,  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  est **normalement convergente** sur le disque (fermé)  $D_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq r\}$ .
- Sur  $\overset{\circ}{D}_R = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$ , en supposant  $(a_n)$  réelle, la somme

$$S : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$

est **indéfiniment dérivable** et pour tout  $p \in \mathbb{N}$

$$\left( \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right)^{(p)} = \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1) \cdots (n-p+1) a_n x^{n-p}.$$

De même ...

## Proposition 2

Soit  $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$  une série entière de rayon de convergence  $R$  où  $(a_n)$  est réelle. Alors pour tout  $a, b \in \mathbb{R}$  tel que  $[a, b] \subseteq ]-R, R[$ ,

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b a_n x^n dx.$$