COURS 7

Séries à termes positifs

Soit $\sum u_n$ une série réelle de terme général u_n. On dit que la série est à termes positifs si $u_n \geq 0$ pour n assez grand.

Si $\sum u_n$ est une série à termes positifs, alors la suite (S_n) est croissante (à partir d'un certain rang)

$$S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geq 0$$

et donc pour prouver que la série $\sum u_n$ est convergente, il suffit de montrer que la suite (S_n) est majorée.

Si $\sum u_n$ est une série quelconque (réelle ou complexe), la série $\sum |u_n|$ est une série à termes positifs et donc la convergence de cette dernière implique la convergence de la série initiale $\sum u_n$ (convergence absolue).

Proposition

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs. On suppose que $u_n \leq v_n$, pour n assez grand.

- Si $\sum u_n$ est divergente alors $\sum v_n$ est divergente.
- Si $\sum v_n$ est convergente alors $\sum u_n$ est convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

Exemples

- On a

$$0 \leq \frac{|\cos n|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

  et les deux séries $\sum \frac{|\cos n|}{n^2}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ sont à **termes positifs**.
  La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente et donc la série $\sum \frac{|\cos n|}{n^2}$ est convergente.
  En particulier, la série $\sum \frac{\cos n}{n^2}$ est convergente puisqu'elle est absolument convergente.
- On a

$$0 \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{\ln n}$$

  et les deux séries $\sum \frac{1}{n}$ et $\sum \frac{1}{\ln n}$ sont à **termes positifs**.
  La série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ est divergente et donc la série $\sum \frac{1}{\ln n}$ est divergente.

Rappel : équivalence

Soient (u_n) et (v_n) deus suites. On dit qu'elles sont équivalentes à l'infini et on écrit $u_n \sim_{+\infty} v_n$, s'il existe une suite ϵ_n telle que pour n assez grand $u_n = v_n(1+\epsilon_n)$ avec $\lim_{n\to+\infty} \epsilon_n = 0$.

Si $v_n \neq 0$ pour n assez grand,

$$u_n \sim_{+\infty} v_n \text{ si et seulement si } \lim_{n\to+\infty} u_n/v_n = 1.$$

Théorème

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs. Si $u_n \sim_{+\infty} v_n$, alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature (toutes les deux convergentes ou toutes les deux divergentes).

Exemple

On a

$$\ln(1+\frac{1}{2^n}) \sim_{+\infty} \frac{1}{2^n}$$

et les deux séries $\sum \ln(1+\frac{1}{2^n})$ et $\sum \frac{1}{2^n}$ sont à **termes positifs**.

Comme la série $\sum \frac{1}{2^n}$ est un série géométrique convergente, on déduit que la série $\sum \ln(1+\frac{1}{2^n})$ est convergente.

Rappel : négligeabilité

Soient (u_n) et (v_n) deux suites. On dit (u_n) est négligeable devant (v_n) à l'infini et on écrit $u_n = o(v_n)$,s'il existe une suite ϵ_n telle que pour n assez grand $u_n = v_n\epsilon_n$ avec $\lim_{n\to+\infty} \epsilon_n = 0$.

Si $v_n \neq 0$ pour n assez grand,

$$u_n = o(v_n) \text{ si et seulement si } \lim_{n\to+\infty} u_n/v_n = 0.$$

Théorème

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs telles que $u_n = o(v_n)$.

- Si la série $\sum v_n$ est convergente, alors la série $\sum u_n$ est convergente.
- Si la série $\sum u_n$ est divergente, alors la série $\sum v_n$ est divergente.

Exemple

On a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{-n}}{1/n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{e^n} = 0$$

et la série $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série (de Riemann) **à termes positifs** convergente.

Donc la série $\sum e^{-n}$ est convergente.

Théorème

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction décroissante, positive et intégrable sur tout intervalle borné $[0, a]$ où $a > 0$ (par exemple si f est continue). Posons

$$I_n = \int_0^n f(x)\, dx.$$

Alors la série de terme général $u_n = f(n)$ est convergente si et seulement si $\lim_{n\to+\infty} I_n$ est finie.

Exemple : séries de Riemann

Appliquons ce théorème pour montrer que la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.

La série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ peut se réécrire sous la forme $\sum \frac{1}{(1+n)^\alpha}$. On considère l'application $x \mapsto \frac{1}{(1+x)^\alpha}$ qui satisfait les conditions du théorème. On a

$$\int_0^n \frac{1}{(1+x)^\alpha}\, dx = \begin{cases} \frac{(1+n)^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} & \text{si } \alpha \neq 1, \\ \ln(1+n) & \text{si } \alpha = 1. \end{cases}$$

On en déduit

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \frac{1}{(1+x)^\alpha}\, dx = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha \leq 1, \\ \frac{1}{1-\alpha} & \text{si } \alpha > 1. \end{cases}$$

Exemple : séries de Bertrand

Soient α et β deux réels. On appelle série de Bertrand la série réelle à termes positifs suivante

$$\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}.$$

Alors la série de Bertrand est convergente si et seulement si $\alpha > 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$).

En effet, on peut appliquer le théorème précédent en utilisant la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta}$.

Théorème (Règle de D'Alembert)

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs avec $u_n > 0$ pour n assez grand. Supposons que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell \in \mathbb{R}.$$

- Si $\ell < 1$, alors la série $\sum u_n$ est convergente.
- Si $\ell > 1$, alors la série $\sum u_n$ est divergente (grossièrement).
- Si $\ell = 1$, on ne peut pas conclure.

Si $\ell = 1$, on ne peut pas conclure, ce qui revient à dire qu'il existe des séries avec $\ell = 1$ et qui sont convergentes et qu'il existe des séries avec $\ell = 1$ et qui sont divergentes.

Exemple

Soit $\sum u_n$ la série de terme général $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$. On a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!/(n+1)^{n+1}}{n!/n^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} (\frac{n}{n+1})^n = 1/e < 1$$

et donc la série $\sum \frac{n!}{n^n}$ converge.

Théorème (Règle de Cauchy)

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. Supposons que

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell \in \mathbb{R}.$$

- Si $\ell < 1$, alors la série $\sum u_n$ est convergente.
- Si $\ell > 1$, alors la série $\sum u_n$ est divergente (grossièrement).
- Si $\ell = 1$, on ne peut pas conclure.

Preuve.

- Supposons $\ell < 1$. Alors il existe un $\epsilon > 0$ tel que $\ell < \ell + \epsilon < 1$. Pour n assez grand

  $$-\epsilon \leq \sqrt[n]{u_n} - \ell \leq \epsilon, \text{ et donc } u_n \leq (\ell+\epsilon)^n.$$

  Comme la série de terme général $(\ell+\epsilon)^n$ est convergente, on conclut par comparaison que la série $\sum u_n$ est convergente.
- Supposons $\ell > 1$. Alors il existe un $\epsilon > 0$ tel que $1 + \epsilon < \ell$. Pour n assez grand

  $$-\epsilon \leq \sqrt[n]{u_n} - \ell \leq \epsilon, \text{ et donc } (\ell-\epsilon)^n \leq u_n.$$

  Comme $\ell - \epsilon > 1$, on a $\lim_{n\to+\infty}(\ell-\epsilon)^n = +\infty$ et par comparaison $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et donc la série $\sum u_n$ est (grossièrement) divergente. □

La règle de Cauchy est bien adaptée à l'étude des séries dont le terme général contient des puissances.

Exemple

Soit $\sum u_n$ la série de terme général $u_n = (\dfrac{n}{n+1})^{n^2}$. On a

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{(\frac{n}{n+1})^{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} (\frac{n}{n+1})^n = 1/e < 1$$

et donc la série $\sum (\frac{n}{n+1})^{n^2}$ converge.

Définition

Une série dont le terme général s'écrit, pour n assez grand, sous la forme $u_n = (-1)^n v_n$ avec $v_n \geq 0$, s'appelle une série alternée.

Exemple

La série harmonique alternée $\sum \frac{(-1)^n}{n}$.

Exercice

Montrer qu'une série $\sum u_n$ est alternée si et seulement si pour n assez grand $u_n = (-1)^n |u_n|$.

Théorème (Règle des séries alternées)

Soit $\sum (-1)^n v_n$ une série alternée ($v_n \geq 0$). Supposons que

- la suite (v_n) est décroissante,
- $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$.

Alors

- la série $\sum (-1)^n v_n$ est convergente,
- soit S la somme de la série et posons

$$R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots$$

  appelé le reste d'ordre n de la série. Alors R_n a le signe de u_{n+1} et

$$|R_n| \leq |u_{n+1}|.$$

Exemple

La série harmonique alternée $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente.

II. Suites et séries de fonctions

II. 1. Suites de fonctions

Une **suite de fonctions** est la donnée d'une suite

$$f_1, f_2, \cdots, f_n, \cdots$$

de fonctions définies sur une partie de $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{C}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Rappel

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 1

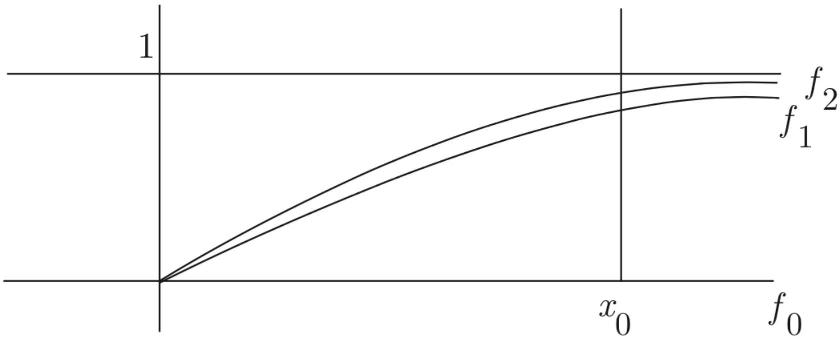
Soit $D \subseteq \mathbb{K}$. Une suite de fonctions de D dans $\mathbb{K}$ est la donnée pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'une application $f_n : D \mapsto \mathbb{K}$.

Notation. On notera $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(f_n)_n$ ou (f_n) la suite de fonctions.

Exemple 1

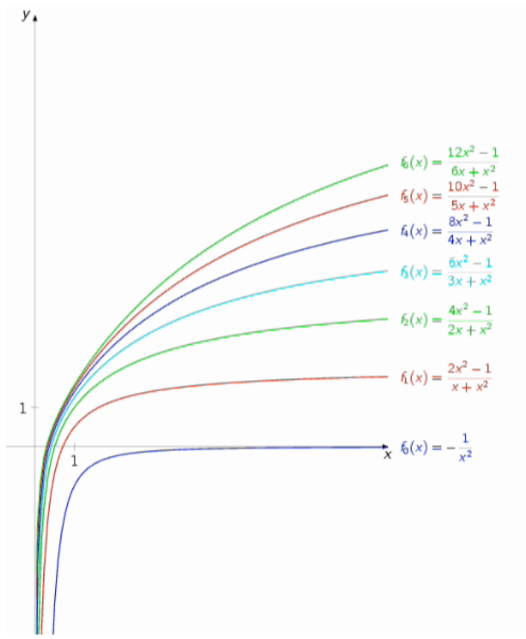
Soit $D = [0, +\infty[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in D$, on pose

$$f_n(x) = \frac{nx}{1 + nx}.$$



Exemple 2

$$f_n : \left\{ \begin{array}{ccc}]0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f_n(x) = \frac{2nx^2 - 1}{nx + x^2}. \end{array} \right.$$



Exemple 3

$$f_n : \left\{ \begin{array}{lll}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f_n(x) = \cos(nx). \end{array} \right.$$

Exemple 4

$$f_n : \left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f_n(x) = x^n. \end{array} \right.$$

Pour les suites de fonctions, on dispose de plusieurs formes de convergence.

On commence par la plus simple ....

On a vu qu'une suite numérique peut converger (ou non) vers une limite finie ℓ. De la même manière, on peut étudier la converge d'une suite de fonctions et voir si elle peut *s'approcher (converger)* (ou non) d'une fonction "limite".

Soit $x_0 \in D$ fixé. Alors la suite $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite numérique dont on peut étudier la convergence.

Si pour tout $x \in D$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, alors on peut définir une *fonction limite* f par

$$f : \left\{ \begin{array}{lll} D & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x). \end{array} \right.$$

Définition 2

Soient $D \subseteq \mathbb{K}$ et (f_n) une suite de fonctions définie sur D et à valeurs dans $\mathbb{K}$.
On dit que (f_n) converge simplement sur D, si pour tout $x \in D$, la suite numérique $(f_n(x))$ est convergente dans $\mathbb{K}$.

Si (f_n) converge simplement sur D, alors la fonction f définie par

$$f : \left\{ \begin{array}{lll} D & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) \end{array} \right.$$

est appelée la limite simple de la suite (f_n) sur D.

Exemple 1 (suite)

Reprenons l'exemple

$$f_n : \begin{cases} [0,+\infty[& \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \quad f_n(x) = \dfrac{nx}{1+nx}. \end{cases}$$

On a :

- pour $x \in]0,+\infty[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{nx}{1+nx} = 1$,
- pour $x = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(0) = 0$.

Donc (f_n) converge simplement sur $[0,+\infty[$ vers la fonction f définie par

$$f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Exemple 2 (suite)

Reprenons l'exemple

$$f_n : \begin{cases}]0,+\infty[& \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \quad f_n(x) = \dfrac{2nx^2-1}{nx+x^2}. \end{cases}$$

On a, pour tout $x \in]0,+\infty[$,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2nx^2-1}{nx+x^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n(x^2-\frac{1}{2n})}{n(x+\frac{x^2}{n})} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2(x^2-\frac{1}{2n})}{(x+\frac{x^2}{n})} = 2x^2/x = 2x.$$

Donc (f_n) converge simplement vers la fonction f définie par

$$f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}, \; f(x) = 2x.$$

Exemple 4 (suite)

Reprenons l'exemple

$$f_n : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \quad f_n(x) = x^n. \end{cases}$$

- Si $|x| < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$.
- Si $x = 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 1$.
- Si $|x| > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = +\infty$, donc $(f_n(x))$ diverge.
- Si $x = -1$, $f_n(x) = (-1)^n$ et donc $(f_n(x))$ n'admet pas de limite.

Donc (f_n) ne converge pas simplement sur $\mathbb{R}$.

Remarque

En général, la convergence simple dépend du domaine de définition D de la suite (f_n).

Dans l'exemple précédent, (f_n) ne converge pas simplement sur $\mathbb{R}$. En revanche, elle converge simplement sur l'intervalle $I =]-1, 1]$ et admet comme limite (simple) l'application f définie par

$$f :]-1, 1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 1, \\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

Supposons que (f_n) est une suite de fonctions définies de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, convergeant simplement vers une fonction f. Donc on suppose qu'il y a déjà une convergence simple.

Dans beaucoup d'applications, on aimerait savoir si une propriété qui est satisfaite pour toutes les fonctions f_n, serait aussi satisfaite par f.
On peut se demander si :

- la continuité de chaque f_n entraîne t-elle la continuité de f ?
- chaque f_n est dérivable, f est-elle dérivable et a-t-on $f' = \lim\limits_{n \to +\infty} f_n'$?
- chaque f_n est intégrable, f est-elle intégrable et a-t-on alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b f(t)dt$?

La convergence simple n'est pas suffisante. Il nous faut une notion plus forte, qui est la **convergence uniforme**.

Définition 3 (Convergence uniforme)

Soit (f_n) une suite de fonctions qui converge simplement sur D vers la fonction f. On dit que (f_n) converge uniformément sur D vers f si :

- la quantité $u_n = \sup_{x \in D}(|f_n(x) - f(x)|)$ existe et finie pour n assez grand,
- $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

En pratique ...

Proposition 1

La suite (f_n) converge uniformément sur D vers f, si et seulement si, il existe une suite réelle (u_n) vérifiant :

- pour n assez grand : $\forall x \in D$, $|f_n(x) - f(x)| \leq u_n$,
- $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

Remarque

Pour montrer la convergence uniforme de (f_n), il faut après avoir trouvé la limite simple f, essayer de majorer $|f_n(x) - f(x)|$ en fonction seulement de n, indépendamment de x.

Exemple 1 (suite)

Reprenons l'exemple

$$f_n : \left\{ \begin{array}{lll} [0,+\infty[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f_n(x) = \dfrac{nx}{1+nx}. \end{array} \right.$$

On a vu que (f_n) converge simplement vers f qui est définie par

$$f : D = [0,+\infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{array} \right.$$

Pour tout $x > 0$, $|f_n(x) - f(x)| = |\dfrac{nx}{1+nx} - 1| = \dfrac{1}{1+nx}$ et $|f_n(0) - f(0)| = 0$.

On a $u_n = \sup_{x \in D} \dfrac{1}{1+nx} = 1$ qui ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Donc (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur D.

Exemple 1 (suite)

En revanche, (f_n) converge uniformément vers f sur tout intervalle de la forme $D = [a,+\infty[$ où $a > 0$. En effet, pour tout $x \in D$,

$$a \leq x \Rightarrow 1 + na \leq 1 + nx \Rightarrow \frac{1}{1+nx} \leq \frac{1}{1+na},$$

donc en posant $u_n = \dfrac{1}{1+na}$, on a

$$|f_n(x) - f(x)| \leq u_n,$$

et comme $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$, on déduit le résultat.

Exemple 2 (suite)

Reprenons l'exemple

$$f_n : \left\{ \begin{array}{lll} D =]0,+\infty[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f_n(x) = \dfrac{2nx^2 - 1}{nx + x^2}. \end{array} \right.$$

On a vu que (f_n) converge simplement vers la fonction f définie par $f :]0,+\infty[\rightarrow \mathbb{R}, \; f(x) = 2x$. On a $|f_n(x) - f(x)| = \dfrac{1+2x^3}{nx+x^2}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\frac{1+2x^3}{nx+x^2} \sim_{+\infty} 2x$$

et donc $\lim_{x \to +\infty} |f_n(x) - f(x)| = +\infty$.

Donc la suite (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur D.

Exemple 2 (suite)

En revanche, (f_n) converge uniformément vers f, sur tout intervalle de la forme $[a, b]$ où $0 < a < b < +\infty$.
En effet, on a

$$\frac{1+2a^3}{nb+b^2} \leq \frac{1+2x^3}{nx+x^2} \leq \frac{1+2b^3}{na+a^2},$$

donc

$$|f_n(x) - f(x)| \leq u_n = \frac{1+2b^3}{na+a^2}$$

et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, on déduit le résultat.

Théorème 1

Si une suite de fonctions (f_n) **converge uniformément** sur D vers une fonction f et si chaque f_n est continue sur D, alors f est continue sur D.

Plus précisément, si (f_n) **converge uniformément** sur D vers f et si chaque f_n est continue en $x_0 \in D$, alors f est continue en x_0 et on a

$$\lim_{x\to x_0}\big(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\big) = \lim_{n\to+\infty}\big(\lim_{x\to x_0} f_n(x)\big).$$

Remarque

Attention, la convergence simple n'est pas suffisante pour déduire la continuité de la limite (simple).
Reprenons la suite

$$f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} [0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f_n(x) = \dfrac{nx}{1+nx}. \end{array} \right.$$

dont la limite simple est $f : D = [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{array} \right.$ Chaque f_n est continue sur D (en particulier en 0), alors que f n'est pas continue en 0.