COURS 6

V. Espace vectoriel muni d'un produit scalaire, diagonalisation des matrices symétriques et hermitiennes

V. 5. Diagonalisation des matrices symétriques et hermitiennes

Nous avons vu à la section sur la réduction des endomorphismes qu'étant donnée une matrice A, on cherche une matrice diagonale D semblable à A ; ou d'une façon équivalente, on cherche une base $\mathcal{B}$ dans laquelle A est représentée par une matrice diagonale.

Dans les espaces euclidiens ou hermitiens, où nous disposons d'un produit scalaire, on peut se demander, étant donnée une matrice A, s'il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ dans laquelle A est représentée par une matrice diagonale.

Nous verrons que les matrices qui vérifient cette propriété dans les espaces euclidiens sont les matrices symétriques et dans les espaces hermitiens sont les matrices hermitiennes.

V. 5. 1. Matrices symétriques

Définition

Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq n;1\leq j\leq m}$ une matrice de type (n, m) à coefficients dans $\mathbb{K}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

La transposée de A, notée ${}^tA$, est la matrice de type (m, n) définie par : pour $1 \leq j \leq n$, la colonne j de ${}^tA$ est égale à ligne j de A.

$${}^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

Exemple

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Alors

$${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Définition

On dit que A est symétrique si elle est égale à sa transposée.

$$A \text{ est symétrique si et seulement si } A = {}^tA.$$

Exemple

La matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$
est symétrique, alors que la matrice
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$
ne l'est pas car $B \neq {}^tB$
$${}^tB = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Définition

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est diagonalisable dans une base orthonormée s'il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de $\mathbb{K}^n$ et une matrice diagonale D telles que
$$A = P_{Can\mathcal{B}} D P_{Can\mathcal{B}}^{-1}.$$
(Rappel : *Can* est la base canonique de $\mathbb{K}^n$).

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et supposons que A est diagonalisable dans une base orthonormée $\mathcal{B} = (f_1, \cdots, f_n)$. Alors, comme *Can* est orthonormée, la matrice de passage $P = P_{Can\mathcal{B}} = (p_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ a comme coefficients
$$p_{ij} = \langle f_j | e_i \rangle .$$
Symétriquement, comme $\mathcal{B}$ est orthonormée, la matrice de passage $P' = P_{\mathcal{B}Can} = (p'_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ a comme coefficients
$$p'_{ij} = \langle e_j | f_i \rangle .$$
On remarque que
$$p_{ij} = \langle f_j | e_i \rangle = \langle e_i | f_j \rangle = p'_{ji}$$
et donc $P' = {}^tP$.
D'où
$${}^tA = {}^t(PDP') = {}^t P'{}^t D {}^t P = PDP' = A$$
et donc A est symétrique. En fait cette dernière condition est aussi suffisante ...

Théorème

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors A est diagonalisable dans une base orthonormée si et seulement si A est symétrique.

Intermédiaire important ...

Proposition

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. Alors les sous-espaces propres associés aux valeurs propres de A sont deux à deux orthogonaux.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si A est symétrique, alors il existe une matrice de passage P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$.

Nous avons vu que $P^{-1} = {}^tP$. On dit que P est orthogonale.

Définition

Soit $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que P est orthogonale si $P \cdot {}^tP = {}^tP \cdot P = I_n$. Autrement dit si P est inversible et $P^{-1} = {}^tP$.

Exemple

Dans $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire canonique, toute matrice orthogonale est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \text{ ou } B = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

La première représente une rotation d'angle θ et le seconde représente une symétrie orthogonale.

Exemple

Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, toute matrice orthogonale est semblable à une matrice de la forme

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \text{ ou } B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Proposition

Soient E un espace euclidien de dimension n et $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors P est orthogonale si et seulement si P est la matrice de passage d'une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E à une base orthonormée $\mathcal{B}'$ de E.

Mise en pratique

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 3/2 & 1 \end{pmatrix}$$

et cherchons une matrice diagonale D et une matrice orthogonale P telles que $A = PDP^{-1}$. Comme A est symétrique cela est possible.

Les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = \frac{-1}{2}$ et $\lambda_2 = \frac{5}{2}$. Les sous-espaces propres sont

$$E_{-1/2}(A) = Vect((1,-1)),\ E_{5/2} = Vect((1,1))$$

et par conséquent, en posant $\vec{u} = (1,-1)$ et $\vec{v} = (1,1)$, $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v})$ est une base de vecteurs propres de A. Pour avoir une base orthonormée, on prend les vecteurs unitaires

$$\vec{u}' = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}),\quad \vec{v}' = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$$

et donc $\mathcal{B}' = (\vec{u}', \vec{v}')$ est une base orthonormée dans laquelle A est représentée par une matrice diagonale.

On a finalement

$$D = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & 5/2 \end{pmatrix},\ P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \text{ et } A = PD{}^tP.$$

V. 5. 2. Matrices hermitiennes

Dans un espace hermitien, les matrices symétriques ne sont pas suffisantes pour caractériser les matrices diagonalisables dans des bases orthonormées.

Par exemple la matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

est symétrique mais elle n'est même pas diagonalisable !

Définition

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq n}$ une matrice carrée (n, n) à coefficients dans $\mathbb{C}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

La conjuguée de A, notée $\overline{A}$, est la matrice carrée (n, n) dont les coefficients sont les conjugués des coefficients de A

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} & \cdots & \bar{a}_{1n} \\ \bar{a}_{21} & \bar{a}_{22} & \cdots & \bar{a}_{2n} \\ \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ \bar{a}_{n1} & \bar{a}_{n2} & \cdots & \bar{a}_{nn} \end{pmatrix}$$

Définition

Soit A une matrice carrée (n, n) à coefficients dans $\mathbb{C}$. La transconjuguée de A est la transposée de la conjuguée de A, elle est notée A^*.

Donc $A^* = {}^t\overline{A}$.

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 2i & 3 \end{pmatrix}, \ \overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -2i & 3 \end{pmatrix}, \ A^* = \begin{pmatrix} 1 & -2i \\ -i & 3 \end{pmatrix}$$

Définition

Soit A une matrice carrée (n, n) à coefficients dans $\mathbb{C}$. On dit que A est hermitienne si $A = A^*$.

Exemple

$$B = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix}, \ \overline{B} = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 2 \end{pmatrix}, \ B^* = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix}$$

et donc B est hermitienne.

Théorème

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Alors A est diagonalisable dans une base orthonormée si et seulement si A est hermitienne.

Une proposition intermédiaire importante ...

Proposition

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ hermitienne. Alors

- les sous-espaces propres associés aux valeurs propres de A sont deux à deux orthogonaux.
- les valeurs propres de A sont réelles.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. De même ici, si A est hermitienne, il existe une matrice de passage P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$.

Que peut-on dire de plus sur la matrice P ? Vérifie-t-elle des propriétés particulières ?

Dans le cas des espaces hermitiens, elle est en fait unitaire.

Définition

Soit $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On dit que P est unitaire si $P \cdot P^* = P^* \cdot P = I_n$. Autrement dit si P est inversible et $P^{-1} = P^*$.

Proposition

Soient E un espace hermitien de dimension n et $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Alors P est unitaire si et seulement si P est la matrice de passage d'une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E à une base orthonormée $\mathcal{B}'$ de E.

Conclusion ...

Théorème Spectral

Soit A une matrice réelle (resp. complexe). Alors il existe une matrice P orthogonale (resp. unitaire) et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$ si et seulement si A est symétrique (resp. hermitienne).

Chapitre 2 : Suites et séries numériques et de fonctions

I. 1. Suites numériques

Dans la suite $\mathbb{K}$ désigne le *corps* des nombres réels $\mathbb{R}$ ou le *corps* des nombres complexes $\mathbb{C}$.

Rappel

- Pour tout nombre complexe $z = a + ib \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, il existe un unique couple $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[$ tel que $z = \rho e^{i\theta}$. On a

$$|z| = \rho = \sqrt{a^2 + b^2},\ a = \rho\cos(\theta),\ b = \rho\sin(\theta).$$

- Si x est réel alors la valeur absolue $|x|$ coïncide avec le module de x.

Définition

Un suite numérique réelle est une suite de nombres réels

$$u_0, \cdots, u_n, \cdots$$

et une suite numérique complexe est une suite de nombres complexes

$$u_0, \cdots, u_n, \cdots$$

Formellement, c'est une application

$$u : \begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{K}, \\ n \mapsto u_n, \end{cases}$$

où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, selon on considère les suites réelles ou complexes.

- On note par $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou (u_n) la suite.
- On appelle u_n le terme général de la suite (u_n).

Une suite peut être définie de multiples façons :

- en donnant explicitement le terme général u_n en fonction de n : exemples : $u_n = \frac{1}{n}$, $u_n = (1+i)^n$, ...
- par récurrence :
  exemples : $u_{n+1} = u_n + 3$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + 3u_n$, ...
- par d'autres moyens plus ou moins théoriques ou pratiques :
  exemples : u_n est la n-ième décimale de π, u_n est la population mondiale en l'année n, ...
- $\cdots$

Remarque

L'espace des suites de $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les opérations :

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} + (v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}, \quad \lambda(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Définition

Soit $r > 0$ et $a \in \mathbb{K}$. On appelle disque de rayon r et de centre a dans $\mathbb{K}$, l'ensemble

$$D_r(a) = \{x \in \mathbb{K}, \ |x - a| \leq r\}.$$

- Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $z = x + iy, \ z_0 = x_0 + iy_0$, alors

  $$D_r(z_0) = \left\{z \in \mathbb{C}, |z - z_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \leq r\right\}$$

  ce qui représente dans le plan un *disque* de rayon r et de centre (x_0, y_0).
- Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, alors $D_r(a)$ est *l'intervalle* $[a - r, a + r]$.

Définition

Soit $a \in \mathbb{K}$. Un sous-ensemble $V \subseteq \mathbb{K}$ est appelé un voisinage de a s'il existe $r > 0$ tel que $D_r(a) \subseteq V$.

Définition

Soient (u_n) une suite de $\mathbb{K}$ et $a \in \mathbb{K}$. On dit que a est la limite de (u_n) et on note $\lim_{n\to+\infty} u_n = a$ si pour tout $r > 0$, il existe $N_r \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_r$, on ait $u_n \in D_r(a)$.

Définition équivalente

On dit que a est la limite de (u_n) et on note $\lim_{n\to+\infty} u_n = a$ si pour tout voisinage V de a, il existe $N_V \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_V$, on ait $u_n \in V$.

Convergence

On dit que (u_n) est convergente s'il existe $a \in \mathbb{K}$ tel que $\lim_{n\to+\infty} u_n = a$.
Une suite qui n'est pas convergente est dite divergente.

Exemples

- $u_n = \frac{1}{n}$, $n \geq 1$, $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.
- $u_n = \frac{n}{n+1}$, $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.
- $u_n = \frac{n}{n+1} + i\frac{2n^2}{n^2+2}$, $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1 + 2i$.
- $u_n = z^n, z \in \mathbb{C}$, avec $0 \leq |z| < 1$, $\lim_{n\to+\infty} z^n = 0$.

Définition

Soit (u_n) une suite réelle.

- On dit que (u_n) tend vers $+\infty$ et on écrit $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, si

$$\forall M > 0, \exists N_M \in \mathbb{N}, \forall n \, (n \geq N_M \Rightarrow u_n \geq M).$$

- On dit que (u_n) tend vers $-\infty$ et on écrit $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$, si

$$\forall M < 0, \exists N_M \in \mathbb{N}, \forall n \, (n \geq N_M \Rightarrow u_n \leq M).$$

Exemples

- $u_n = n$, $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
- $u_n = -\ln n$, $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Remarque

Si (u_n) est une suite complexe, $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ ou $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ n'a pas de sens.

Proposition

Soit (z_n) une suite de nombres complexes. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. (z_n) est convergente,
2. les suites réelles $(\mathrm{Re}(z_n))$ et $(\mathrm{Im}(z_n))$ sont convergentes.

De plus $\lim_{n\to+\infty} z_n = a + ib$ si et seulement si $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{Re}(z_n) = a$ et $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{Im}(z_n) = b$.

Proposition

Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes de $\mathbb{K}$, de limites respectives ℓ_1 et ℓ_2. Alors :

- pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, la suite (λu_n) est convergente de limite $\lambda \ell_1$,
- la suite $(u_n + v_n)$ est convergente de limite $\ell_1 + \ell_2$,
- la suite $(u_n v_n)$ est convergente de limite $\ell_1 \ell_2$,
- si $\ell_2 \neq 0$, alors $v_n \neq 0$ pour n assez grand et u_n/v_n est convergente de limite ℓ_1/ℓ_2.

Proposition

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que $u_n \leq v_n$ pour n assez grand. Si (u_n) et (v_n) sont convergentes de limites respectives ℓ_1 et ℓ_2 alors $\ell_1 \leq \ell_2$.

Théorème des gendarmes

Soient (a_n), (b_n) et (u_n) trois suites réelles telles que

$$\begin{cases} a_n \leq u_n \leq b_n & \text{pour } n \text{ assez grand,} \\ (a_n) \text{ et } (b_n) & \text{convergent vers une même limite } \ell. \end{cases}$$

Alors (u_n) est convergente de limite ℓ.

Proposition

Si (u_n) est une suite convergente de limite ℓ alors la suite $(|u_n|)$ est convergente de limite $|\ell|$.

Preuve. Conséquence de la propriété

$$\Big| |u_n| - |\ell| \Big| \leq |u_n - \ell|.$$

$\square$

Rappel

Si (u_n) est une suite complexe alors $|u_n|$ est le module de u_n et si (u_n) est réelle alors $|u_n|$ est la valeur absolue de u_n.

Suites arithmétiques

Soit $a, r \in \mathbb{K}$. La suite arithmétique de premier terme a et de raison r est la suite définie par récurrence par :

$$\begin{cases} u_0 = a, \\ u_{n+1} = u_n + r. \end{cases}$$

Propriétés :

$$u_n = a + nr, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N},$$

$$\sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = (n+1)a + r\frac{n(n+1)}{2}.$$

$$(u_n) \text{ converge } \Leftrightarrow r = 0 \Leftrightarrow (u_n) \text{ est constante}$$

Suites géométriques

Soit $a, r \in \mathbb{K}$. La suite géométrique de premier terme a et de raison r est la suite définie par récurrence par :

$$\begin{cases} u_0 = a, \\ u_{n+1} = ru_n. \end{cases}$$

Propriétés :

$$u_n = ar^n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N},$$

$$\sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \begin{cases} a\frac{1-r^{n+1}}{1-r} \text{ si } r \neq 1, \\ a(n+1) \text{ si } r = 1. \end{cases}$$

$$(u_n) \text{ converge } \Leftrightarrow 0 \leq |r| < 1 \text{ ou } r = 1.$$

Définition

Une suite (u_n), réelle ou complexe, est dite bornée si

$$\exists M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leq M.$$

Définition

Une suite réelle (u_n) est dite majorée si

$$\exists M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq M,$$

et minorée si

$$\exists m \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ m \leq u_n.$$

Propriété

Une suite réelle est bornée si et seulement si elle est majorée et minorée. □

Théorème

Toute suite (réelle ou complexe) convergente est bornée.

Définition

On dit qu'une suite réelle (u_n) est croissante si

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geq u_n,$$

décroissante si

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leq u_n$$

et monotone si elle est croissante ou décroissante.

Théorème

- Une suite réelle croissante est convergente si et seulement si elle est majorée.
- Une suite réelle décroissante est convergente si et seulement si elle est minorée.

I. 2. Séries numériques

Soit (u_n) une suite réelle ou complexe. On s'intéresse à la somme du nombre infini de termes

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n + \cdots$$

dont on voudrait donner un sens et voir si elle est finie ou non. Informellement, c'est ce qu'on appelle une série.

L'idée est de considérer la suite (S_n) définie par

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$

et d'étudier sa convergence. Si (S_n) est convergente de limite ℓ, alors

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n + \cdots = \ell$$

et on écrit

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \ell.$$

Définition

Soit (u_n) une suite réelle ou complexe. On appelle série de terme général u_n et on note $\sum u_n$, la suite (S_n) définie par

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

- On appelle S_n la la somme partielle d'ordre n de la série $\sum u_n$.
- On dit que la série $\sum u_n$ converge (resp. diverge) si la suite (S_n) converge (resp. diverge).
- Si la série converge, $\lim_{n\to+\infty} S_n$ est notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et est appelée la somme de la série $\sum u_n$.

Exemple : séries géométriques

Soient $z \in \mathbb{C}$ et soit $\sum u_n$ la série de terme général $u_n = z^n$, qu'on appelle série géométrique de raison z. La suite (u_n) est une suite géométrique de raison z et on a

$$\text{si } z \neq 1,\ S_n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}.$$

$$\text{si } z = 1,\ S_n = n + 1.$$

La série $\sum u_n$ converge si et seulement si $0 \leq |z| < 1$.

Si elle converge, on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$.

Exemple : série harmonique

La série $\sum u_n$ de terme général $u_n = \frac{1}{n}$ est appelée la série harmonique.
On a

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n},$$

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

et donc la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ est divergente.

Exemple : séries de Riemann

On appelle série de Riemann une série de la forme $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ où $\alpha > 0$.

La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Proposition

Une série complexe de terme général u_n est convergente si et seulement si les deux séries réelles de terme général respectif $Re(u_n)$ et $Im(u_n)$ sont convergentes.

Proposition

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries convergentes et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors les séries $\sum \lambda u_n$ et $\sum (u_n + v_n)$ sont convergentes et

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda u_n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n,$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

Théorème (Condition nécessaire de convergence)

Si la série $\sum u_n$ converge, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Preuve. On a, pour $n \geq 1$,

$$u_n = S_n - S_{n-1}$$

et donc comme $\sum u_n$ est convergente, $\lim_{n\to+\infty} S_n = \ell$ et

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} S_n - S_{n-1} = \ell - \ell = 0.$$

□

Définition

On dit d'une série $\sum u_n$ qu'elle est grossièrement divergente si $\lim_{n\to+\infty} u_n \neq 0$.

Remarques

- Pour prouver la divergence de certaines séries, en montre que le terme général u_n ne tend pas vers 0.
  Exemple : la série de terme général $\ln n$ est divergente car $\lim_{n\to+\infty} \ln n \neq 0$.
- La réciproque est fausse en général.
  Exemple : la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ est divergente alors que $\frac{1}{n}$ tend vers 0.

Définition

On dit de la série $\sum u_n$ qu'elle est absolument convergente si la série $\sum |u_n|$ est convergente.

Théorème

Une série absolument convergente est convergente et

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|.$$

Exemple

Soit $\sum u_n$ la série de terme général $\frac{(-1)^n}{n^2}$. On a $|u_n| = 1/n^2$ et la série $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente. Par conséquent, la série $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ est absolument convergente et donc convergente.

Définition

Lorsqu'une série est convergente mais pas absolument convergente, on dit qu'elle est semi-convergente.

Soit $\sum u_n$ une série réelle de terme général u_n. On dit que la série est à termes positifs si $u_n \geq 0$ pour n assez grand.

Si $\sum u_n$ est une série à termes positifs, alors la suite (S_n) est croissante (à partir d'un certain rang)

$$S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geq 0$$

et donc pour prouver que la série $\sum u_n$ est convergente, il suffit de montrer que la suite (S_n) est majorée.

Si $\sum u_n$ est une série quelconque (réelle ou complexe), la série $\sum |u_n|$ est une série à termes positifs et donc la convergence de cette dernière implique la convergence de la série initiale $\sum u_n$ (convergence absolue).

Proposition

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs. On suppose que $u_n \leq v_n$, pour n assez grand.

- Si $\sum u_n$ est divergente alors $\sum v_n$ est divergente.
- Si $\sum v_n$ est convergente alors $\sum u_n$ est convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

Exemples

- On a
$$0 \leq \frac{|\cos n|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$
et les deux séries $\sum \frac{|\cos n|}{n^2}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ sont à **termes positifs**.
La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente et donc la série $\sum \frac{|\cos n|}{n^2}$ est convergente.
En particulier, la série $\sum \frac{\cos n}{n^2}$ est convergente puisqu'elle est absolument convergente.
- On a
$$0 \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{\ln n}$$
et les deux séries $\sum \frac{1}{n}$ et $\sum \frac{1}{\ln n}$ sont à **termes positifs**.
La série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ est divergente et donc la série $\sum \frac{1}{\ln n}$ est divergente.

Rappel : équivalence

Soient (u_n) et (v_n) deus suites. On dit qu'elles sont équivalentes à l'infini et on écrit $u_n \sim_{+\infty} v_n$, s'il existe une suite ϵ_n telle que pour n assez grand $u_n = v_n(1+\epsilon_n)$ avec $\lim_{n\to+\infty} \epsilon_n = 0$.
Si $v_n \neq 0$ pour n assez grand,
$$u_n \sim_{+\infty} v_n \text{ si et seulement si } \lim_{n\to+\infty} u_n/v_n = 1.$$

Théorème

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs. Si $u_n \sim_{+\infty} v_n$, alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature (toutes les deux convergentes ou toutes les deux divergentes).

Exemple

On a
$$\ln(1+\frac{1}{2^n}) \sim_{+\infty} \frac{1}{2^n}$$
et les deux séries $\sum \ln(1+\frac{1}{2^n})$ et $\sum \frac{1}{2^n}$ sont à **termes positifs**.

Comme la série $\sum \frac{1}{2^n}$ est un série géométrique convergente, on déduit que la série $\sum \ln(1+\frac{1}{2^n})$ est convergente.

Rappel : négligeabilité

Soient (u_n) et (v_n) deux suites. On dit (u_n) est négligeable devant (v_n) à l'infini et on écrit $u_n = o(v_n)$,s'il existe une suite ϵ_n telle que pour n assez grand $u_n = v_n\epsilon_n$ avec $\lim_{n\to+\infty} \epsilon_n = 0$.
Si $v_n \neq 0$ pour n assez grand,
$$u_n = o(v_n) \text{ si et seulement si } \lim_{n\to+\infty} u_n/v_n = 0.$$

Théorème

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs telles que $u_n = o(v_n)$.

- Si la série $\sum v_n$ est convergente, alors la série $\sum u_n$ est convergente.
- Si la série $\sum u_n$ est divergente, alors la série $\sum v_n$ est divergente.

Exemple

On a
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{-n}}{1/n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{e^n} = 0$$
et la série $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série (de Riemann) **à termes positifs** convergente.
Donc la série $\sum e^{-n}$ est convergente.