

# Chapitre 1: Algèbre Linéaire

Mathématiques 3, 2019

## V. Espace vectoriel muni d'un produit scalaire, diagonalisation des matrices symétriques et hermitiennes

## V. 5. Diagonalisation des matrices symétriques et hermitiennes

Nous avons vu à la section sur la réduction des endomorphismes qu'étant donnée une matrice  $A$ , on cherche une matrice diagonale  $D$  semblable à  $A$ ; ou d'une façon équivalente, on cherche une **base**  $\mathcal{B}$  dans laquelle  $A$  est représentée par une matrice diagonale.

Dans les espaces euclidiens ou hermitiens, où nous disposons d'un **produit scalaire**, on peut se demander, étant donnée une matrice  $A$ , s'il existe une **base orthonormée**  $\mathcal{B}$  dans laquelle  $A$  est représentée par une matrice diagonale.

Nous verrons que les matrices qui vérifient cette propriété dans les espaces euclidiens sont les matrices **symétriques** et dans les espaces hermitiens sont les matrices **hermitiennes**.

## V. 5. 1. Matrices symétriques

## Définition

Soit  $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m}$  une matrice de type  $(n, m)$  à coefficients dans  $\mathbb{K}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

La **transposée** de  $A$ , notée  ${}^tA$ , est la matrice de type  $(m, n)$  définie par : pour  $1 \leq j \leq n$ , la colonne  $j$  de  ${}^tA$  est égale à ligne  $j$  de  $A$ .

$${}^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

## Exemple

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Alors

$${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

## Définition

On dit que  $A$  est **symétrique** si elle est égale à sa transposée.

$A$  est symétrique si et seulement si  $A = {}^tA$ .



## Exemple

La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

est symétrique, alors que la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

ne l'est pas car  $B \neq {}^tB$

$${}^tB = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

## Définition

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On dit que  $A$  est diagonalisable dans une **base orthonormée** s'il existe une **base orthonormée**  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{K}^n$  et une matrice diagonale  $D$  telles que

$$A = P_{Can\mathcal{B}} D P_{Can\mathcal{B}}^{-1}.$$

(Rappel :  $Can$  est la base canonique de  $\mathbb{K}^n$ ).

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et supposons que  $A$  est diagonalisable dans une base orthonormée  $\mathcal{B} = (f_1, \dots, f_n)$ . Alors, comme  $Can$  est orthonormée, la matrice de passage  $P = P_{Can\mathcal{B}} = (p_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  a comme coefficients

$$p_{ij} = \langle f_j | e_i \rangle .$$

Symétriquement, comme  $\mathcal{B}$  est orthonormée, la matrice de passage  $P' = P_{\mathcal{B}Can} = (p'_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  a comme coefficients

$$p'_{ij} = \langle e_j | f_i \rangle .$$

On remarque que

$$p_{ij} = \langle f_j | e_i \rangle = \langle e_i | f_j \rangle = p'_{ji}$$

et donc  $P' = {}^t P$ .

D'où

$${}^t A = {}^t(PDP') = {}^t P' {}^t D {}^t P = PDP' = A$$

et donc  $A$  est symétrique. En fait cette dernière condition est aussi suffisante ...

## Théorème

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Alors  $A$  est **diagonalisable** dans une **base orthonormée** si et seulement si  $A$  est **symétrique**.

Intermédiaire important ...

## Proposition

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  une matrice symétrique. Alors les sous-espaces propres associés aux valeurs propres de  $A$  sont deux à deux orthogonaux.

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Si  $A$  est symétrique, alors il existe une matrice de passage  $P$  et une matrice diagonale  $D$  telles que  $A = PDP^{-1}$ .

Nous avons vu que  $P^{-1} = {}^tP$ . On dit que  $P$  est **orthogonale**.

## Définition

Soit  $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . On dit que  $P$  est **orthogonale** si  $P \cdot {}^tP = {}^tP \cdot P = I_n$ .  
Autrement dit si  $P$  est inversible et  $P^{-1} = {}^tP$ .

## Exemple

Dans  $\mathbb{R}^2$  muni du produit scalaire canonique, toute matrice orthogonale est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \text{ ou } B = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

La première représente une rotation d'angle  $\theta$  et la seconde représente une symétrie orthogonale.

## Exemple

Dans  $\mathbb{R}^3$  muni du produit scalaire canonique, toute matrice orthogonale est semblable à une matrice de la forme

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$



## Proposition

Soient  $E$  un espace euclidien de dimension  $n$  et  $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Alors  $P$  est orthogonale si et seulement si  $P$  est la matrice de passage d'une base orthonormée  $\mathcal{B}$  de  $E$  à une base orthonormée  $\mathcal{B}'$  de  $E$ .

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 3/2 & 1 \end{pmatrix}$$

et cherchons une matrice **diagonale**  $D$  et une matrice **orthogonale**  $P$  telles que  $A = PDP^{-1}$ . Comme  $A$  est symétrique cela est possible.

Les valeurs propres de  $A$  sont  $\lambda_1 = \frac{-1}{2}$  et  $\lambda_2 = \frac{5}{2}$ . Les sous-espaces propres sont

$$E_{-1/2}(A) = \text{Vect}((1, -1)), \quad E_{5/2} = \text{Vect}((1, 1))$$

et par conséquent, en posant  $\vec{u} = (1, -1)$  et  $\vec{v} = (1, 1)$ ,  $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v})$  est une base de vecteurs propres de  $A$ . Pour avoir une base orthonormée, on prend les vecteurs unitaires

$$\vec{u}' = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}), \quad \vec{v}' = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$$

et donc  $\mathcal{B}' = (\vec{u}', \vec{v}')$  est une base orthonormée dans laquelle  $A$  est représentée par une matrice diagonale.

On a finalement

$$D = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & 5/2 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \text{ et } A = PD^tP.$$

## V. 5. 2. Matrices hermitiennes

Dans un espace hermitien, les matrices symétriques ne sont pas suffisantes pour caractériser les matrices diagonalisables dans des bases orthonormées.

Par exemple la matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

est symétrique mais elle n'est même pas diagonalisable !

## Définition

Soit  $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq n}$  une matrice carrée  $(n, n)$  à coefficients dans  $\mathbb{C}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

La **conjuguée** de  $A$ , notée  $\bar{A}$ , est la matrice carrée  $(n, n)$  dont les coefficients sont les conjugués des coefficients de  $A$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} & \cdots & \bar{a}_{1n} \\ \bar{a}_{21} & \bar{a}_{22} & \cdots & \bar{a}_{2n} \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \bar{a}_{n1} & \bar{a}_{n2} & \cdots & \bar{a}_{nn} \end{pmatrix}$$

## Définition

Soit  $A$  une matrice carrée  $(n, n)$  à coefficients dans  $\mathbb{C}$ . La **transconjuguée** de  $A$  est la transposée de la conjuguée de  $A$ , elle est notée  $A^*$ .

Donc  $A^* = {}^t\bar{A}$ .

## Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 2i & 3 \end{pmatrix}, \bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -2i & 3 \end{pmatrix}, A^* = \begin{pmatrix} 1 & -2i \\ -i & 3 \end{pmatrix}$$



## Définition

Soit  $A$  une matrice carrée  $(n, n)$  à coefficients dans  $\mathbb{C}$ . On dit que  $A$  est **hermitienne** si  $A = A^*$ .

## Exemple

$$B = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix}, \quad \overline{B} = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 2 \end{pmatrix}, \quad B^* = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix}$$

et donc  $B$  est hermitienne.

## Théorème

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Alors  $A$  est **diagonalisable** dans une **base orthonormée** si et seulement si  $A$  est **hermitienne**.

Une proposition intermédiaire importante ...

## Proposition

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  hermitienne. Alors

- les sous-espaces propres associés aux valeurs propres de  $A$  sont deux à deux orthogonaux.
- les valeurs propres de  $A$  sont réelles.

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . De même ici, si  $A$  est hermitienne, il existe une matrice de passage  $P$  et une matrice diagonale  $D$  telles que  $A = PDP^{-1}$ .

Que peut-on dire de plus sur la matrice  $P$ ? Vérifie-t-elle des propriétés particulières?

Dans le cas des espaces hermitiens, elle est en fait **unitaire**.

## Définition

Soit  $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . On dit que  $P$  est **unitaire** si  $P \cdot P^* = P^* \cdot P = I_n$ .  
Autrement dit si  $P$  est inversible et  $P^{-1} = P^*$ .

## Proposition

Soient  $E$  un espace hermitien de dimension  $n$  et  $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Alors  $P$  est unitaire si et seulement si  $P$  est la matrice de passage d'une base orthonormée  $\mathcal{B}$  de  $E$  à une base orthonormée  $\mathcal{B}'$  de  $E$ .

Conclusion ...

### Théorème Spectral

Soit  $A$  une matrice **réelle** (resp. **complexe**). Alors il existe une matrice  $P$  **orthogonale** (resp. **unitaire**) et une matrice diagonale  $D$  telles que  $A = PDP^{-1}$  si et seulement si  $A$  est **symétrique** (resp. **hermitienne**).

## Chapitre 2 : Suites et séries numériques et de fonctions



## I. 1. Suites numériques

Dans la suite  $\mathbb{K}$  désigne le *corps* des nombres réels  $\mathbb{R}$  ou le *corps* des nombres complexes  $\mathbb{C}$ .

## Rappel

- Pour tout nombre complexe  $z = a + ib \in \mathbb{C}$ ,  $z \neq 0$ , il existe un unique couple  $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[$  tel que  $z = \rho e^{i\theta}$ . On a

$$|z| = \rho = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad a = \rho \cos(\theta), \quad b = \rho \sin(\theta).$$

- Si  $x$  est réel alors la valeur absolue  $|x|$  coïncide avec le module de  $x$ .

## Définition

Une suite **numérique réelle** est une suite de nombres réels

$$u_0, \dots, u_n, \dots$$

et une suite **numérique complexe** est une suite de nombres complexes

$$u_0, \dots, u_n, \dots$$

Formellement, c'est une application

$$u : \begin{cases} \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}, \\ n \mapsto u_n, \end{cases}$$

où  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , selon on considère les suites réelles ou complexes.

- On note par  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ou  $(u_n)$  la suite.
- On appelle  $u_n$  le **terme général** de la suite  $(u_n)$ .

Une suite peut être définie de multiples façons :

- en donnant explicitement le terme général  $u_n$  en fonction de  $n$  :  
exemples :  $u_n = \frac{1}{n}$ ,  $u_n = (1 + i)^n$ , ...
- par récurrence :  
exemples :  $u_{n+1} = u_n + 3$ ,  $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$ ,  $u_{n+2} = u_{n+1} + 3u_n$ , ...
- par d'autres moyens plus ou moins théoriques ou pratiques :  
exemples :  $u_n$  est la  $n$ -ième décimale de  $\pi$ ,  $u_n$  est la population mondiale en l'année  $n$ , ...
- ...

## Remarque

L'espace des suites de  $\mathbb{K}$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel pour les opérations :

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} + (v_n)_{n \in \mathbb{N}} = (u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad \lambda(u_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\lambda u_n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

## Définition

Soit  $r > 0$  et  $a \in \mathbb{K}$ . On appelle **disque de rayon  $r$  et de centre  $a$**  dans  $\mathbb{K}$ , l'ensemble

$$D_r(a) = \{x \in \mathbb{K}, |x - a| \leq r\}.$$

- Si  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ,  $z = x + iy$ ,  $z_0 = x_0 + iy_0$ , alors

$$D_r(z_0) = \left\{ z \in \mathbb{C}, |z - z_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \leq r \right\}$$

ce qui représente dans le plan un *disque* de rayon  $r$  et de centre  $(x_0, y_0)$ .

- Si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , alors  $D_r(a)$  est *l'intervalle*  $[a - r, a + r]$ .

## Définition

Soit  $a \in \mathbb{K}$ . Un sous-ensemble  $V \subseteq \mathbb{K}$  est appelé **un voisinage** de  $a$  s'il existe  $r > 0$  tel que  $D_r(a) \subseteq V$ .

## Définition

Soient  $(u_n)$  une suite de  $\mathbb{K}$  et  $a \in \mathbb{K}$ . On dit que  $a$  est la **limite** de  $(u_n)$  et on note  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$  si pour tout  $r > 0$ , il existe  $N_r \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq N_r$ , on ait  $u_n \in D_r(a)$ .

## Définition équivalente

On dit que  $a$  est la **limite** de  $(u_n)$  et on note  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$  si pour tout voisinage  $V$  de  $a$ , il existe  $N_V \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq N_V$ , on ait  $u_n \in V$ .



## Convergence

On dit que  $(u_n)$  est **convergente** s'il existe  $a \in \mathbb{K}$  tel que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ . Une suite qui n'est pas convergente est dite **divergente**.

## Exemples

- $u_n = \frac{1}{n}$ ,  $n \geq 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .
- $u_n = \frac{n}{n+1}$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$ .
- $u_n = \frac{n}{n+1} + i \frac{2n^2}{n^2+2}$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1 + 2i$ .
- $u_n = z^n$ ,  $z \in \mathbb{C}$ , avec  $0 \leq |z| < 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} z^n = 0$ .

## Définition

Soit  $(u_n)$  une suite réelle.

- On dit que  $(u_n)$  tend vers  $+\infty$  et on écrit  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ , si

$$\forall M > 0, \exists N_M \in \mathbb{N}, \forall n (n \geq N_M \Rightarrow u_n \geq M).$$

- On dit que  $(u_n)$  tend vers  $-\infty$  et on écrit  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ , si

$$\forall M < 0, \exists N_M \in \mathbb{N}, \forall n (n \geq N_M \Rightarrow u_n \leq M).$$

## Exemples

- $u_n = n, \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$
- $u_n = -\ln n, \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty.$

## Remarque

Si  $(u_n)$  est une suite complexe,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$  ou  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$  n'a pas de sens.

## Proposition

Soit  $(z_n)$  une suite de nombres complexes. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- 1  $(z_n)$  est convergente,
- 2 les suites réelles  $(\operatorname{Re}(z_n))$  et  $(\operatorname{Im}(z_n))$  sont convergentes.

De plus  $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = a + ib$  si et seulement si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \operatorname{Re}(z_n) = a$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \operatorname{Im}(z_n) = b$ .

## Proposition

Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites convergentes de  $\mathbb{K}$ , de limites respectives  $\ell_1$  et  $\ell_2$ . Alors :

- pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$ , la suite  $(\lambda u_n)$  est convergente de limite  $\lambda \ell_1$ ,
- la suite  $(u_n + v_n)$  est convergente de limite  $\ell_1 + \ell_2$ ,
- la suite  $(u_n v_n)$  est convergente de limite  $\ell_1 \ell_2$ ,
- si  $\ell_2 \neq 0$ , alors  $v_n \neq 0$  pour  $n$  assez grand et  $u_n/v_n$  est convergente de limite  $\ell_1/\ell_2$ .

## Proposition

Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites réelles telles que  $u_n \leq v_n$  pour  $n$  assez grand. Si  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont convergentes de limites respectives  $\ell_1$  et  $\ell_2$  alors  $\ell_1 \leq \ell_2$ .

## Théorème des gendarmes

Soient  $(a_n)$ ,  $(b_n)$  et  $(u_n)$  trois suites réelles telles que

$$\left\{ \begin{array}{l} a_n \leq u_n \leq b_n \text{ pour } n \text{ assez grand,} \\ (a_n) \text{ et } (b_n) \text{ convergent vers une même limite } \ell. \end{array} \right.$$

Alors  $(u_n)$  est convergente de limite  $\ell$ .

## Proposition

Si  $(u_n)$  est une suite convergente de limite  $\ell$  alors la suite  $(|u_n|)$  est convergente de limite  $|\ell|$ .

**Preuve.** Conséquence de la propriété

$$||u_n| - |\ell|| \leq |u_n - \ell|.$$



## Rappel

Si  $(u_n)$  est une suite complexe alors  $|u_n|$  est le module de  $u_n$  et si  $(u_n)$  est réelle alors  $|u_n|$  est la valeur absolue de  $u_n$ .

## Suites arithmétiques

Soit  $a, r \in \mathbb{K}$ . La suite arithmétique de premier terme  $a$  et de raison  $r$  est la suite définie par récurrence par :

$$\begin{cases} u_0 = a, \\ u_{n+1} = u_n + r. \end{cases}$$

Propriétés :

$$u_n = a + nr, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N},$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} = na + r \frac{n(n-1)}{2}.$$

$$(u_n) \text{ converge} \Leftrightarrow r = 0 \Leftrightarrow (u_n) \text{ est constante}$$



## Suites géométriques

Soit  $a, r \in \mathbb{K}$ . La suite géométrique de premier terme  $a$  et de raison  $r$  est la suite définie par récurrence par :

$$\begin{cases} u_0 = a, \\ u_{n+1} = ru_n. \end{cases}$$

Propriétés :

$$u_n = ar^n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N},$$

$$\sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \begin{cases} a \frac{1-r^{n+1}}{1-r} & \text{si } r \neq 1, \\ a(n+1) & \text{si } r = 1. \end{cases}$$

$$(u_n) \text{ converge} \Leftrightarrow 0 \leq |r| < 1 \text{ ou } r = 1.$$

## Définition

Une suite  $(u_n)$ , réelle ou complexe, est dite **bornée** si

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M.$$

## Définition

Une suite **réelle**  $(u_n)$  est dite **majorée** si

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M,$$

et **minorée** si

$$\exists m \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, m \leq u_n.$$

## Propriété

Une suite réelle est bornée si et seulement si elle est majorée et minorée.



## Théorème

Toute suite (réelle ou complexe) convergente est bornée.

## Définition

On dit qu'une suite réelle  $(u_n)$  est **croissante** si

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq u_n,$$

**décroissante** si

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n$$

et **monotone** si elle est croissante ou décroissante.

## Théorème

- Une suite réelle croissante est convergente si et seulement si elle est majorée.
- Une suite réelle décroissante est convergente si et seulement si elle est minorée.

## I. 2. Séries numériques

Soit  $(u_n)$  une suite réelle ou complexe. On s'intéresse à la **somme du nombre infini de termes**

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n + \cdots$$

dont on voudrait donner un sens et voir si elle est finie ou non. Informellement, c'est ce qu'on appelle une **série**.

L'idée est de considérer la suite  $(S_n)$  définie par

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$

et d'étudier sa convergence. Si  $(S_n)$  est convergente de limite  $\ell$ , alors

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n + \cdots = \ell$$

et on écrit

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \ell.$$

## Définition

Soit  $(u_n)$  une suite réelle ou complexe. On appelle **série** de terme général  $u_n$  et on note  $\sum u_n$ , la **suite**  $(S_n)$  définie par

$$S_n = \sum_{k=1}^n u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

- On appelle  $S_n$  la **la somme partielle d'ordre  $n$**  de la série  $\sum u_n$ .
- On dit que la série  $\sum u_n$  converge (resp. diverge) si la suite  $(S_n)$  converge (resp. diverge).
- Si la série converge,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$  est notée  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$  et est appelée la **somme** de la série  $\sum u_n$ .

## Exemple : séries géométriques

Soient  $z \in \mathbb{C}$  et soit  $\sum u_n$  la série de terme général  $u_n = z^n$ , qu'on appelle **série géométrique de raison  $z$** . La suite  $(u_n)$  est une suite géométrique de raison  $z$  et on a

$$\text{si } z \neq 1, S_n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}.$$

$$\text{si } z = 1, S_n = n + 1.$$

La série  $\sum u_n$  converge si et seulement si  $0 \leq |z| < 1$ .

Si elle converge, on a  $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1 - z}$ .



## Exemple : série harmonique

La série  $\sum u_n$  de terme général  $u_n = \frac{1}{n}$  est appelée **la série harmonique**.  
On a

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n},$$

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

et donc la série harmonique  $\sum \frac{1}{n}$  est divergente.

## Exemple : séries de Riemann

On appelle **série de Riemann** une série de la forme  $\sum \frac{1}{n^\alpha}$  où  $\alpha > 0$ .

La série de Riemann  $\sum \frac{1}{n^\alpha}$  converge si et seulement si  $\alpha > 1$ .

## Proposition

Une série complexe de terme général  $u_n$  est convergente si et seulement si les deux séries réelles de terme général respectif  $Re(u_n)$  et  $Im(u_n)$  sont convergentes.

## Proposition

Soient  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  deux séries convergentes et soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Alors les séries  $\sum \lambda u_n$  et  $\sum (u_n + v_n)$  sont convergentes et

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda u_n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n,$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

## Théorème (Condition nécessaire de convergence)

Si la série  $\sum u_n$  converge, alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .

**Preuve.** On a, pour  $n \geq 1$ ,

$$u_n = S_n - S_{n-1}$$

et donc comme  $\sum u_n$  est convergente,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \ell$  et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n - S_{n-1} = \ell - \ell = 0.$$



## Définition

On dit d'une série  $\sum u_n$  qu'elle est **grossièrement divergente** si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \neq 0$ .

## Remarques

- Pour prouver la divergence de certaines séries, on montre que le terme général  $u_n$  ne tend pas vers 0.

Exemple : la série de terme général  $\ln n$  est divergente car  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln n \neq 0$ .

- La réciproque est fautive en général.

Exemple : la série harmonique  $\sum \frac{1}{n}$  est divergente alors que  $\frac{1}{n}$  tend vers 0.

## Définition

On dit de la série  $\sum u_n$  qu'elle est **absolument convergente** si la série  $\sum |u_n|$  est convergente.

## Théorème

Une série absolument convergente est convergente et

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|.$$

## Exemple

Soit  $\sum u_n$  la série de terme général  $\frac{(-1)^n}{n^2}$ . On a  $|u_n| = 1/n^2$  et la série  $\sum \frac{1}{n^2}$  est une série de Riemann convergente. Par conséquent, la série  $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$  est absolument convergente et donc convergente.

## Définition

Lorsqu'une série est convergente mais pas absolument convergente, on dit qu'elle est **semi-convergente**.



# Séries à termes positifs

Soit  $\sum u_n$  une série réelle de terme général  $u_n$ . On dit que la série est à **termes positifs** si  $u_n \geq 0$  pour  $n$  assez grand.

Si  $\sum u_n$  est une série à termes positifs, alors la suite  $(S_n)$  est croissante (à partir d'un certain rang)

$$S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geq 0$$

et donc pour prouver que la série  $\sum u_n$  est convergente, il suffit de montrer que la suite  $(S_n)$  est majorée.

Si  $\sum u_n$  est une série quelconque (réelle ou complexe), la série  $\sum |u_n|$  est une série à termes positifs et donc la convergence de cette dernière implique la convergence de la série initiale  $\sum u_n$  (convergence absolue).

## Proposition

Soient  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  deux séries à termes positifs. On suppose que  $u_n \leq v_n$ , pour  $n$  assez grand.

- Si  $\sum u_n$  est divergente alors  $\sum v_n$  est divergente.
- Si  $\sum v_n$  est convergente alors  $\sum u_n$  est convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

## Exemples

- On a

$$0 \leq \frac{|\cos n|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

et les deux séries  $\sum \frac{|\cos n|}{n^2}$  et  $\sum \frac{1}{n^2}$  sont à **termes positifs**.

La série de Riemann  $\sum \frac{1}{n^2}$  est convergente et donc la série  $\sum \frac{|\cos n|}{n^2}$  est convergente.

En particulier, la série  $\sum \frac{\cos n}{n^2}$  est convergente puisqu'elle est absolument convergente.

- On a

$$0 \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{\ln n}$$

et les deux séries  $\sum \frac{1}{n}$  et  $\sum \frac{1}{\ln n}$  sont à **termes positifs**.

La série harmonique  $\sum \frac{1}{n}$  est divergente et donc la série  $\sum \frac{1}{\ln n}$  est divergente.

## Rappel : équivalence

Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites. On dit qu'elles sont **équivalentes à l'infini** et on écrit  $u_n \sim_{+\infty} v_n$ , s'il existe une suite  $\epsilon_n$  telle que pour  $n$  assez grand  $u_n = v_n(1 + \epsilon_n)$  avec  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \epsilon_n = 0$ .

Si  $v_n \neq 0$  pour  $n$  assez grand,

$$u_n \sim_{+\infty} v_n \text{ si et seulement si } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n/v_n = 1.$$

## Théorème

Soient  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  deux séries à termes positifs. Si  $u_n \sim_{+\infty} v_n$ , alors les séries  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  sont de même nature (toutes les deux convergentes ou toutes les deux divergentes).

## Exemple

On a

$$\ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) \sim_{+\infty} \frac{1}{2^n}$$

et les deux séries  $\sum \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$  et  $\sum \frac{1}{2^n}$  sont à **termes positifs**.

Comme la série  $\sum \frac{1}{2^n}$  est une série géométrique convergente, on déduit que la série  $\sum \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$  est convergente.

## Rappel : négligeabilité

Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites. On dit  $(u_n)$  est **négligeable** devant  $(v_n)$  à l'infini et on écrit  $u_n = o(v_n)$ , s'il existe une suite  $\epsilon_n$  telle que pour  $n$  assez grand  $u_n = v_n \epsilon_n$  avec  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \epsilon_n = 0$ .

Si  $v_n \neq 0$  pour  $n$  assez grand,

$$u_n = o(v_n) \text{ si et seulement si } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n/v_n = 0.$$

## Théorème

Soient  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  deux séries à termes positifs telles que  $u_n = o(v_n)$ .

- Si la série  $\sum v_n$  est convergente, alors la série  $\sum u_n$  est convergente.
- Si la série  $\sum u_n$  est divergente, alors la série  $\sum v_n$  est divergente.

## Exemple

On a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{-n}}{1/n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{e^n} = 0$$

et la série  $\sum \frac{1}{n^2}$  est une série (de Riemann) à **termes positifs** convergente.

Donc la série  $\sum e^{-n}$  est convergente.