COURS 5

# V. Espace vectoriel muni d'un produit scalaire, diagonalisation des matrices symétriques et hermitiennes

## V. 1. Introduction

Nous avons vu que dans un espace vectoriel nous pouvons additionner des vecteurs et les multiplier par des scalaires.

Pouvons-nous aller plus et définir des notions comme les longueurs, les angles et l'orthogonalité ?

Le produit scalaire est une nouvelle opération qui s'ajoute aux lois s'appliquants aux vecteurs, à savoir l'addition et la multiplication scalaire, et qui permet donc d'utiliser les notions usuelles de géométrie comme les longueurs, les distances, les angles et l'orthogonalité.

Le produit scalaire permet d'étendre ces notions à des espaces vectoriels réels ou complexes de toute dimension.

## V. 2. Produit scalaire

Rappelons que dans $\mathbb{R}^3$ le produit scalaire est défini par (en utilisant la notation matricielle)

$$\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = xx' + yy' + zz'$$

On remarque que ce produit scalaire satsifait les propriétés :

- en fixant $\vec{u}$, l'application $\vec{x} \mapsto \langle \vec{u} | \vec{x} \rangle$ est linéaire ; de même l'application $\vec{x} \mapsto \langle \vec{x} | \vec{u} \rangle$ est linéaire ; on dit qu'elle est *bilinéaire* ;
- *symétrie* : pour tous $\vec{u}, \vec{v}$, $\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle = \langle \vec{v} | \vec{u} \rangle$
- *positivité* : pour tout $\vec{u}$, $\langle \vec{u} | \vec{u} \rangle = x^2 + y^2 + z^2 \geq 0$ ;
- *définie* : pour tout tout $\vec{u}$, $\langle \vec{u} | \vec{u} \rangle = 0 \Rightarrow \vec{u} = 0$.

Il s'avère que ces trois propriétés sont les plus élémentaires qui permettent de généraliser les "propriétés géométriques" recherchées aux espaces abstraits ...

Nous distinguerons le cas réel et le cas complexe pour définir le produit scalaire.

### V. 2. 1. Produit scalaire réel

**Définition**

Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Une application $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ est appelée forme bilinéaire si :

- $\varphi$ est linéaire à droite : pour tout $a \in E$ fixé, l'application $\varphi_a : E \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi_a(y) = \varphi(a, y)$ est linéaire.
- $\varphi$ est linéaire à gauche : pour tout $b \in E$ fixé, l'application $\varphi_b : E \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi_b(x) = \varphi(x, b)$ est linéaire.

### Exemple

En prenant $E = \mathbb{R}$ l'application

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \varphi(x, y) = xy$$

est une forme bilinéaire sur $E$. En effet :

- $\varphi$ est linéaire à droite : pour tout $a \in \mathbb{R}$ fixé, l'application $\varphi_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi_a(y) = ay$ est évidemment linéaire.
- $\varphi$ est linéaire à gauche : pour tout $b \in \mathbb{R}$ fixé, l'application $\varphi_b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi_b(x) = xb$ est évidemment linéaire.

On remarque par contre que $\varphi$ elle-même n'est pas linéaire (exercice).

### Définition

Une forme bilinéaire $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ est

- symétrique si $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$ pour tous $x, y \in E$.
- positive si $\varphi(x, x) \geq 0$ pour tout $x \in E$.
- définie si pour tout $x \in E$,
$$\varphi(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0.$$

### Exemple

Dans $\mathbb{R}^2$, l'application

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1 + x_2y_2$$

est une forme bilinéaire (exercice) symétrique et définie positive. En effet :

- $\varphi$ est symétrique : on a
$$\varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1 + x_2y_2 = y_1x_1 + y_2x_2 = \varphi((y_1, y_2), (x_1, x_2))$$
et donc $\varphi$ est symétrique.
- $\varphi$ est définie positive : on a
$$\varphi((x_1, x_2), (x_1, x_2)) = x_1^2 + x_2^2 \geq 0$$
et $\varphi((x_1, x_2), (x_1, x_2)) = 0$ si et seulement si $(x_1, x_2) = (0, 0)$.

### Définition

Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On appelle produit scalaire sur $E$ toute forme bilinéaire sur $E$ qui est symétrique et définie positive.

Un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire est appelé un espace préhilbertien. S'il est de dimension finie alors est appelé un espace euclidien.

### Notation

Si $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ est un produit scalaire, alors $\varphi(x, y)$ est noté $\langle x|y \rangle$.

### Exemple : Produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$

Dans $\mathbb{R}^n$, le produit scalaire canonique, est défini par

$$\langle (x_1, \dots, x_n) | (y_1, \dots, y_n) \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n.$$

### Exemple

Soit $E = C([a, b])$ le $\mathbb{R}$-e.v des applications continues de l'intervalle $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. Alors l'application

$$E \times E \to \mathbb{R},\ (f, g) \to \langle f | g \rangle = \int_a^b f(x) g(x)\, dx$$

est un produit scalaire. En effet

- bilinéarité : conséquence de la linéarité de l'intégrale ;
- symétrie : $\langle f | g \rangle = \langle g | f \rangle$ est évidente ;
- positivité : $\langle f | f \rangle = \displaystyle\int_a^b f(x)^2\, dx \geq 0$ car l'intégrale d'une fonction positive est positive ;
- définie : $\langle f | f \rangle = 0 \Rightarrow f = 0$ ; propriété de l'intégrale de Riemann.

### Exemple

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-e.v des matrices carrées $n \times n$. Alors l'application

$$E \times E \to \mathbb{R},\ (A, B) \to \langle A | B \rangle = Tr(A^t \cdot B)$$

est un produit scalaire (où pour une matrice $M$, $Tr(M)$ désigne la trace de $M$ et $M^t$ désigne la transposée de $M$).

### Exercice

Soit $E = \mathbb{R}^2$. Pour $(x, y), (x', y') \in E$, on pose

$$\varphi((x, y), (x', y')) = xx' + 12(xy' + yx') + yy'.$$

Montrer que $\varphi$ est un produit scalaire sur $E$.

## V. 2. 3. Produit scalaire complexe

### Définition

Soit $E$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Une application $\varphi : E \times E \to \mathbb{C}$ est appelée forme sesquilinéaire sur $E$ si :

- pour tout $b \in E$ fixé, l'application $\varphi_b : E \to \mathbb{C}$ définie par $\varphi_b(x) = \varphi(x, b)$ est linéaire.
- pour tout $a \in E$ fixé, l'application $\varphi_a : E \to \mathbb{C}$ définie par $\varphi_a(y) = \varphi(a, y)$ est semi-linéaire :

$$\varphi(a, y_1 + y_2) = \varphi(a, y_1) + \varphi(a, y_2),\ \text{pour tout } y_1, y_2 \in E$$

$$\varphi(a, \lambda y) = \bar{\lambda} \varphi(a, y),\ \text{pour tout y } \in E \text{ et } \lambda \in \mathbb{C}.$$

### Exemple

En prenant $E = \mathbb{C}$ l'application

$$\mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \; \varphi(x, y) = x\overline{y}$$

est une forme sesquilinéaire sur $E$. En effet :

- pour tout $b \in \mathbb{R}$ fixé, l'application $\varphi_b : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $\varphi_b(x) = xb$ est linéaire.
- pour tout $a \in \mathbb{C}$ fixé, l'application $\varphi_a : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $\varphi_a(y) = a\overline{y}$ est semi-linéaire :

$$\varphi_a(y_1 + y_2) = a(\overline{y_1 + y_2}) = a\overline{y_1} + a\overline{y_2} = \varphi_a(y_1) + \varphi_a(y_2)$$
$$\varphi_a(\lambda y) = a\overline{\lambda y} = a\overline{\lambda}\overline{y} = \overline{\lambda}\varphi_a(y).$$

### Définition

Une forme sesquilinéaire $\varphi : E \times E \to \mathbb{C}$ est

- hermitienne si $\varphi(x, y) = \overline{\varphi(y, x)}$, pour tout $x, y \in E$.
- positive si $\varphi(x, x) \geq 0$ pour tout $x \in E$.
- définie si pour tout $x \in E$,

$$\varphi(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0.$$

### Exemple

Dans $\mathbb{C}^2$, l'application

$$\varphi : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}, \; \varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2}$$

est une forme sesquilinéaire (exercice) hermitienne et définie positive. En effet :

- $\varphi$ est hermitienne : on a

$$\varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} = \overline{y_1\overline{x_1} + y_2\overline{x_2}} = \overline{\varphi((y_1, y_2), (x_1, x_2))}$$

  et donc $\varphi$ est hermitienne.
- $\varphi$ est définie positive : on a

$$\varphi((x_1, x_2), (x_1, x_2)) = x_1\overline{x_1} + x_2\overline{x_2} = |x_1|^2 + |x_2|^2 \geq 0$$

  et $\varphi((x_1, x_2), (x_1, x_2)) = 0 \Rightarrow (x_1, x_2) = (0, 0)$.

### Définition

Soit $E$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. On appelle produit scalaire sur $E$ toute forme sesquilinéaire sur $E$ qui est hermitienne et définie positive.

Un $\mathbb{C}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire est appelé un espace préhilbertien. S'il est de dimension finie alors il est appelé hermitien.

### Notation

Si $\varphi : E \times E \to \mathbb{C}$ est un produit scalaire, alors $\varphi(x, y)$ est noté $\langle x | y \rangle$.

## Exemple : Produit scalaire canonique de $\mathbb{C}^n$

Dans $\mathbb{C}^n$, le produit scalaire canonique, est défini par

$$\langle (x_1,\dots,x_n)|(y_1,\dots,y_n)\rangle = x_1\overline{y_1}+\cdots+x_n\overline{y_n}.$$

## Récapitulatif pour les $\mathbb{R}$-espaces vectoriels

Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

- On appelle produit scalaire sur $E$ toute forme bilinéaire sur $E$ qui est symétrique et définie positive.
- Un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire est appelé un espace préhilbertien.
- Un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire est appelé un espace euclidien.
- Produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$ : le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$, est défini par

$$\langle (x_1,\dots,x_n)|(y_1,\dots,y_n)\rangle = x_1y_1+\cdots+x_ny_n.$$

## Récapitulatif pour les $\mathbb{C}$-espaces vectoriels

Soit $E$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

- On appelle produit scalaire sur $E$ toute forme sesquilinéaire sur $E$ qui est hermitienne et définie positive.
- Un $\mathbb{C}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire est appelé un espace préhilbertien.
- Un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire est appelé un espace hermitien.
- Produit scalaire canonique de $\mathbb{C}^n$ : le produit scalaire canonique de $\mathbb{C}^n$, est défini par

$$\langle (x_1,\dots,x_n)|(y_1,\dots,y_n)\rangle = x_1\overline{y_1}+\cdots+x_n\overline{y_n}.$$

### V. 2. 4. Propriétés géométriques

## Rappel

Si $\varphi : E\times E\to\mathbb{K}$ est un produit scalaire, alors $\varphi(x,y)$ est noté $\langle x|y\rangle$.

Dans la suite $E$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel préhilbertien. Donc un espace vectoriel, réel ou complexe, muni d'un produit scalaire noté $\langle x|y\rangle$.

## Définition

Nous avons pour tout $x\in E$, $\langle x|x\rangle \geq 0$ ; on pose alors

$$\|x\| = \sqrt{\langle x|x\rangle}$$

qu'on appelle la norme de $x$ ;

## Exemple

Dans $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire canonique

$$\langle (x,y)|(x',y')\rangle = xx'+yy'$$

on retombe sur la notion usuelle de norme (ou longueur)

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\langle (x,y)|(x,y)\rangle} = \sqrt{x^2+y^2}$$

## Proposition

Pour tous $x, y \in E$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ on a :

- $\|x\| \geq 0$,
- $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$,
- $\|x\| = 0$ si et seulement si $x = 0$,
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Inégalité triangulaire),
- $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2Re(\langle x|y\rangle) + \|y\|^2$.

## Définition

Pour tous $x, y \in E$, on pose $d(x, y) = \|x - y\|$ qu'on appelle la distance entre $x$ et $y$.

## Exemple

Dans $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire canonique

$$\langle (x, y)|(x', y')\rangle = xx' + yy'$$

on retombe également sur la notion usuelle de distance

$$\begin{aligned} d((x, y),(x', y')) &= \sqrt{\langle (x - x', y - y')|(x - x', y - y')\rangle} \\ &= \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}. \end{aligned}$$

## Proposition

Pour tous $x, y, z \in E$ on a :

- pour tous $x, y \in E$, $d(x, y) \geq 0$,
- pour tous $x, y \in E$, $d(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$,
- pour tous $x, y \in E$, $d(x, y) = d(y, x)$,
- pour tous $x, y, z \in E$, $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (Inégalité triangulaire).

## Proposition (Identité du parallélogramme)

Dans tout espace préhilbertien $E$, on a pour tous $x, y \in E$

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Dans un parallélogramme, la somme des carrés des longueurs des diagonales est égale à la somme des carrés des longueurs des côtés.

## Proposition (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Dans tout espace préhilbertien $E$, on a pour tous $x, y \in E$

$$|\langle x|y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

avec égalité si et seulement si $x$ et $y$ sont linéairement dépendants.

On suppose $E$ euclidien. Soient $u$ et $v$ deux vecteurs non nuls de $E$. On sait d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz que

$$\left|\frac{\langle u|v\rangle}{\|u\|\|v\|}\right| \leq 1$$

On peut donc trouver un unique angle $\alpha \in [0, \pi]$ tel que

$$\cos(\alpha) = \frac{\langle u|v\rangle}{\|u\|\|v\|}$$

### Définition

Cet unique angle est appelé l'angle non orienté entre $u$ et $v$.

## V. 3. Orthogonalité

### Définition

- On dit que deux vecteurs $x, y \in E$ sont orthogonaux si $\langle x|y\rangle = 0$. On écrit $x \perp y$.
- Deux parties $A$ et $B$ de $E$ sont dites orthogonales si pour tout $a \in A$ et pour tout $b \in B$, $a$ et $b$ sont orthogonaux. On écrit $A \perp B$.

### Remarque

Remarquons que deux vecteurs $u$ et $v$ non nuls sont orthogonaux si et seulement si l'angle non orienté formé entre $u$ et $v$ est $\pi/2$.

### Définition

Soit $\mathcal{C} = (u_1, \ldots, u_p)$ une famille de vecteurs d'un espace préhilbertien $E$. On dit que $\mathcal{C}$ est orthogonale si $u_i \perp u_j$ pour tout $i, j \in \{1, \ldots, p\}$ avec $i \neq j$.

### Exemple

On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire canonique. Soit $\mathcal{B} = (u, v)$ la famille définie par

$$u = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}), v = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0)$$

est une famille orthogonale. En effet

$$\langle u|v\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

et donc $u$ et $v$ sont orthogonaux.

### Théorème de Pythagore

Soit $\mathcal{C} = (u_1, \ldots, u_p)$ une famille orthogonale de vecteurs d'un espace préhilbertien $E$. Alors

$$\left\|\sum_{i=1}^{p} u_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{p} \|u_i\|^2.$$

### Proposition

Toute famille de vecteurs, ne contenant pas de vecteurs nuls, orthogonale est libre.

## V. 4. Projection orthogonale

### Proposition

Soit $A$ une partie non vide de $E$. L'ensemble des vecteurs de $E$ qui sont orthogonaux à tous les vecteurs de $A$, noté $A^\perp$

$$A^\perp = \{x \in E | x \perp y \text{ pour tout } y \in A\}$$

est un s.e.v de $E$ appelé l'orthogonal de $A$.

### Proposition

Pour tout s.e.v $F$ de dimension finie de $E$ on a $E = F \oplus F^\perp$.

### Théorème (projection orthogonale)

Soit $F$ un s.e.v de dimension finie de $E$. Pour tout vecteur $x \in E$, il existe un unique vecteur $y$ dans $F$ tel que :

$$d(x, y) = d(x, F) = \inf_{z \in F} d(x, z).$$

C'est l'unique vecteur appartenant à $F$ vérifiant $x - y \in F^\perp$.

Pour $x \in E$, le vecteur $y$ de $F$ fourni par le théorème précédent peut être vu comme la meilleure approximation de $x$ dans $F$.

On dit que $y$ est la projection orthogonale de $x$ sur $F$. On note $y = p_F(x)$.

On a $E = F \oplus F^\perp$ et

$$x = p_F(x) + (x - p_F(x))$$

avec $p_F(x) \in F$ et $x - p_F(x) \in F^\perp$.

## V. 4. Bases orthonormées, orthonormalisation

### Définition

On dit d'un vecteur $x \in E$ qu'il est unitaire si $\|x\| = 1$.

### Définition

Soit $\mathcal{C} = (u_1, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs de $E$. On dit que $\mathcal{C}$ est orthonormée si $\mathcal{C}$ est orthogonale et si $u_i$ est unitaire pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$.

Autrement dit, une famille $\mathcal{C} = (u_1, \dots, u_n)$ de $E$ est une base orthonormée si

- $\|u_i\| = 1$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$,
- $\langle u_i | u_j \rangle = 0$ pour tout $i, j$ avec $i \neq j$.

## Exemple

Reprenons un exemple précédent. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire canonique. Alors la famille $\mathcal{B} = (u, v)$ définie par

$$u = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}), v = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0)$$

est une famille orthonormée. En effet (orthogonalité déjà vue)

$$\langle u|v\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

et donc $u$ et $v$ sont orthogonaux. On a en plus

$$\langle u|u\rangle = \sqrt{(\frac{1}{\sqrt{3}})^2 + (\frac{1}{\sqrt{3}})^2 + (\frac{1}{\sqrt{3}})^2} = 1$$

et de même $\langle v|v\rangle = 1$.

## Définition

Une base de $E$ qui forme une famille orthonormée est appelée base orthonormée.

De même, une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de $E$ est une base orthonormée si

- $\|e_i\| = 1$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$,
- $\langle e_i|e_j\rangle = 0$ pour tout $i, j$ avec $i \neq j$.

## Exemple

Dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique

$$\langle (x_1, \dots, x_n)|(y_1, \dots, y_n)\rangle = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$$

la base canonique $Can = (e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée. Il faut vérifier (exercice)

- $\|e_i\| = 1$,
- $\langle e_i|e_j\rangle = 0$ pour tout $i, j$ avec $i \neq j$.

## Proposition (Lecture des composantes dans une base orthonormée)

Soit $E$ un espace euclidien ou hermitien. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de $E$. Alors pour tout $x \in E$, on a

$$x = \langle x|e_1\rangle\, e_1 + \cdots + \langle x|e_n\rangle\, e_n \quad \text{et} \quad \|x\|^2 = |\langle x|e_1\rangle|^2 + \cdots + |\langle x|e_n\rangle|^2.$$

Donc

$$x = \begin{pmatrix} \langle x|e_1\rangle \\ \vdots \\ \langle x|e_n\rangle \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

## Preuve

Écrivons $x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$ ; donc en composantes dans la base $\mathcal{B}$. Alors par la bilinéarité du produit scalaire et l'orthonormalité de $\mathcal{B}$

$$\begin{aligned}\langle x|e_1\rangle &= \langle \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n | e_1\rangle \\ &= \lambda_1 \langle e_1|e_1\rangle + \cdots + \lambda_n \langle e_n|e_1\rangle \\ &= \lambda_1 \langle e_1|e_1\rangle = \lambda_1.\end{aligned}$$

De même $\langle x|e_i\rangle = \lambda_i$ et donc on a bien

$$x = \langle x|e_1\rangle\, e_1 + \cdots + \langle x|e_n\rangle\, e_n \quad \text{et } \|x\|^2 = |\langle x|e_1\rangle|^2 + \cdots + |\langle x|e_n\rangle|^2. \qquad \square$$

## Proposition (Lecture d'un produit scalaire dans une base orthonormée)

Soit $E$ un espace euclidien. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de $E$. Alors pour tous $x, y \in E$, si

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}, \; y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

alors

$$\langle x|y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n.$$

Autrement dit le produit scalaire dans ce cas, peut être vu comme le produit scalaire canonique dans $\mathbb{R}^n$.

## Proposition (Lecture d'un produit scalaire dans une base orthonormée)

Soit $E$ un espace hermitien. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de $E$. Alors pour tous $x, y \in E$, si

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}, \; y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

alors

$$\langle x|y\rangle = x_1\bar{y}_1 + x_2\bar{y}_2 + \cdots + x_n\bar{y}_n.$$

De même ici, le produit scalaire dans ce cas, peut être vu comme le produit scalaire canonique dans $\mathbb{C}^n$.

## Proposition (Projection orthogonale)

Soit $F$ un s.e.v. de dimension finie de $E$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base orthonormée de $F$.

Alors pour tout $x \in E$, la projection orthogonale de $x$ sur $F$ est donnée par

$$p_F(x) = \langle x|e_1\rangle\, e_1 + \cdots + \langle x|e_p\rangle\, e_p.$$

### Exemple

Dans $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire canonique, calculons la projection orthogonale d'un vecteur $u$ sur la droite vectorielle $F = Vect(v)$ engendrée par le vecteur non nul $v$.

- Une base orthonormée de $F$ : en posant $e = \dfrac{v}{\|v\|}$,on obtient une base orthonormée de $F$.
- On a donc
$$p_F(u) = \langle u|e\rangle \, e = \left\langle u|\frac{v}{\|v\|}\right\rangle \frac{v}{\|v\|} = \frac{\langle u|v\rangle}{\|v\|^2} v = \frac{\langle u|v\rangle}{\langle v|v\rangle} v.$$

### Exemple

Calculons la projection orthogonale de $u = (2, 1, 1)$ sur la droite vectorielle $F = Vect((1, 1, 0))$.

- base orthonormée de $F$ : $\|(1, 1, 0)\| = \sqrt{2}$ et donc en posant $e = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ on obtient une base orthonormée de $F$
- On a
$$p_F(u) = \langle u|e\rangle \, e = (\frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}})(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0) = (\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0).$$

Orthonormalisation de Gram-Schmidt

### Théorème d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Soit $E$ un espace préhilbertien. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une famille libre de $E$. Alors il existe une famille $\mathcal{C} = (f_1, \ldots, f_n)$ de $E$, orthonormée et vérifiant $Vect(f_1, \ldots, f_j) = Vect(e_1, \ldots, e_j)$ pour tout $1 \leq j \leq n$.

On construit les vecteurs $f_1, \ldots, f_n$ par récurrence, selon un procédé appelé le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, comme suit :

1. On pose $f_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}$.
2. Supposons que la famille $(f_1, \ldots, f_j)$ soit construite, $1 \leq j \leq n-1$, on définit alors
$$f'_{j+1} = e_{j+1} - \sum_{k=1}^{j} \langle e_{j+1}|f_k\rangle \, f_k \quad \text{et} \quad f_{j+1} = \frac{f'_{j+1}}{\|f'_{j+1}\|}.$$

### Remarque

Remarquons que le vecteur
$$\sum_{k=1}^{j} \langle e_{j+1}|f_k\rangle \, f_k$$
est la projection orthogonale de $e_{j+1}$ sur l'espace vectoriel engendré par $f_1, f_2, \ldots, f_j$. Par conséquent, le vecteur
$$e_{j+1} - \sum_{k=1}^{j} \langle e_{j+1}|f_k\rangle \, f_k$$
est orthogonal à l'espace vectoriel engendré par $f_1, f_2, \ldots, f_j$. Pour le rendre unitaire il suffit de le diviser par sa norme
$$\frac{e_{j+1} - \sum_{k=1}^{j} \langle e_{j+1}|f_k\rangle \, f_k}{\left\| e_{j+1} - \sum_{k=1}^{j} \langle e_{j+1}|f_k\rangle \, f_k \right\|}.$$

## Exemple

Dans $\mathbb{R}^3$ considérons $u_1 = (1, -1, 0)$; $u_2 = (0, 2, 1)$ et $F = Vect(u_1, u_2)$ et calculons une base orthonormée de $F$ par le procédé de Gram-Schmidt. On pose

$$v_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0)$$

on voit alors $\|v_1\| = 1$ et $Vect(u_1) = Vect(v_1)$. On a

$$u_2 - \langle u_2 | v_1 \rangle \, v_1 = (0, 2, 1) + \sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0) = (1, 1, 1)$$

et on pose donc

$$v_2 = \frac{u_2 - \langle u_2 | v_1 \rangle \, v_1}{\|u_2 - \langle u_2 | v_1 \rangle \, v_1\|} = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}).$$

D'où $(v_1, v_2)$ est une base orthonormée de $F$.

## Corollaire 1 (Existence des bases orthonormées)

Tout espace euclidien ou hermitien admet des bases orthonormées.

## Corollaire 2 (Théorème de la base orthonormée incomplète)

Soit $E$ un espace euclidien ou hermitien de dimension $n \geq 1$. Soit $(e_1, \ldots, e_p)$, où $1 \leq p \leq n-1$, une famille orthonormée de $E$. Alors il existe $e_{p+1}, \ldots, e_n$ de $E$ tels que $(e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_n)$ soit une base orthonormée de $E$.