

Chapitre 1: Algèbre Linéaire

Mathématiques 3, 2019

V. 8. Application de la méthode de Gauss à l'inversion des matrices

Si A est une matrice carrée inversible de type (n, n) et B est l'inverse de A , alors

$$AB = I_n$$

Si B_1, \dots, B_n sont les colonnes de B , l'équation matricielle précédente est équivalente aux n équations

$$AB_i = \vec{e}_i, i = 1, \dots, n.$$

Donc calculer B revient à résoudre n systèmes d'équations linéaires ayant la même matrice A .

Pour calculer la matrice inverse, on applique la méthode de Gauss pour résoudre les systèmes précédents parallèlement.

Exemple

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On écrit alors le tableau

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

et on applique la méthode de Gauss.

Exemple

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 5/3 & -1 & 1/3 & 1 \end{array} \right)$$

Exemple

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 5/3 & -1 & 1/3 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3/5 & 1/5 & 3/5 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3/5 & 1/5 & 3/5 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2/5 & 1/5 & -2/5 \\ 0 & 0 & 1 & -3/5 & 1/5 & 3/5 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2/5 & 1/5 & -2/5 \\ 0 & 0 & 1 & -3/5 & 1/5 & 3/5 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/5 & -2/5 & 4/5 \\ 0 & 1 & 0 & 2/5 & 1/5 & -2/5 \\ 0 & 0 & 1 & -3/5 & 1/5 & 3/5 \end{array} \right)$$

Donc la matrice inverse est

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & -2/5 & 4/5 \\ 2/5 & 1/5 & -2/5 \\ -3/5 & 1/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

V. 7. 1. Systèmes de Cramer

Définition 1

On dit qu'un système de n équations linéaires à n inconnues est un **système de Cramer** si la matrice A de ce système est inversible.

Proposition 1

Soit (S) un système de n équations linéaires à n inconnues écrit sous forme matricielle $AX = B$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- Quel que soit B , le système (S) admet une solution et une seule.
- Quel que soit B , le système (S) admet au moins une solution.
- Quel que soit B , le système (S) admet au plus une solution.
- Le système homogène associé au système (S) n'admet que la solution triviale.
- La matrice A du système (S) est inversible.
- $\det(A) \neq 0$.

La solution unique du système (S) est alors $X = A^{-1}B$.

Proposition (Règle de Cramer)

Soit (S) un système de n équations linéaires à n inconnues écrit sous forme matricielle $AX = B$.

Pour chaque $1 \leq i \leq n$, soit A_i la matrice obtenue en remplaçant la $i^{\text{ème}}$ colonne de A par le second membre B .

Supposons que (S) est de Cramer (donc $\det(A) \neq 0$). Alors l'unique solution (x_1, \dots, x_n) de (S) est donnée par

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Exemple

Soit

$$(S) \begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + 3y = 6 \end{cases}$$

écrit sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

$$\text{On a } \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Donc (S) est un système de Cramer et l'unique solution est

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{9}{1} = 9, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{-4}{1} = -4.$$

VI. Réduction des endomorphismes

VI. 1. Introduction

Rappel

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel.

- Une application linéaire de E dans E est appelée un **endomorphisme**.
- L'espace vectoriel des endomorphismes est noté $End(E)$.

Soient E un \mathbb{K} -e.v de dimension finie et $f \in \text{End}(E)$. On se fixe une base \mathcal{B} de E .

On considère la matrice $M_{\mathcal{B}}(f)$ de f par rapport à la base \mathcal{B} : *on prend la même base pour E comme ensemble de départ que pour E comme ensemble d'arrivée.*

Si $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ et les composantes de chaque $f(\vec{e}_j)$ dans la base \mathcal{B} sont

$$f(\vec{e}_j) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

alors

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Exemple

Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^2 définie par

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = (x + 2y, -x + 4y).$$

Considérons \mathbb{R}^2 muni de la base canonique $Can = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Alors

$$f(\vec{e}_1) = f(1, 0) = (1, -1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}_{Can},$$

$$f(\vec{e}_2) = (0, 1) = (2, 4) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}_{Can}.$$

Donc

$$M_{Can}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Si on considère maintenant \mathbb{R}^2 muni de la base $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v})$ où

$$\vec{u} = (2, 1), \quad \vec{v} = (1, 1)$$

alors

$$f(\vec{u}) = f(2, 1) = (4, 2) = 2\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

$$f(\vec{v}) = f(1, 1) = (3, 3) = 3\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

et donc

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

On voit que les deux matrices de f , par rapport aux différentes bases Can et \mathcal{B}

$$M_{Can}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

sont très différentes.

La dernière matrice est plus **simple**.

La matrice associée à un endomorphisme f dépend de la base choisie : pour deux bases $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$, les matrices $M_{\mathcal{B}_1}(f)$, $M_{\mathcal{B}_2}(f)$ ne sont pas forcément identiques.

L'objectif de la **réduction d'un endomorphisme**, c'est de trouver une base \mathcal{B} dans laquelle $M_{\mathcal{B}}(f)$ soit **la plus simple possible**.

Les matrices les plus simples sont les matrices diagonales :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Elles sont simples : la somme, la multiplication, la puissance n -ème, ... etc, se ramène à des opérations simples.

Exemple

Si

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_p \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \beta_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \beta_p \end{pmatrix}$$

alors

$$AB = \begin{pmatrix} \alpha_1\beta_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2\beta_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_p\beta_p \end{pmatrix}$$

Si

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_p \end{pmatrix}$$

alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$A^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_p^n \end{pmatrix}.$$

VI.2. Définition, propriétés

Définition 2

On dit d'un endomorphisme f qu'il est **diagonalisable**, s'il existe une base \mathcal{B} de E telle que $M_{\mathcal{B}}(f)$ est **diagonale** :

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} .$$

Exemple

Reprenons l'exemple précédent

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = (x + 2y, -x + 4y).$$

Alors, dans la base $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v})$ où

$$\vec{u} = (2, 1), \quad \vec{v} = (1, 1)$$

la matrice de f est

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

et donc f est diagonalisable.

Comment peut-on définir la diagonalisation d'une matrice ?

Rappel

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors l'application linéaire associée à A est définie par

$$f_A : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n, \quad f_A(x_1, \dots, x_n) = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Remarquons que A est la matrice de f_A par rapport à la base canonique :
 $M_{Can}(f_A) = A$.

On définit maintenant la diagonalisation d'une matrice en utilisant son application linéaire associée ...

Définition 3

On dit d'une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qu'elle est **diagonalisable**, si l'application linéaire qui lui est associée est diagonalisable.

Rappelons que si \mathcal{B} est une base de \mathbb{K}^n et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors

$$A = M_{Can}(f_A) = P_{Can, \mathcal{B}} \cdot M_{\mathcal{B}}(f_A) \cdot P_{\mathcal{B}, Can}$$

et $P_{\mathcal{B}, Can} = P_{Can, \mathcal{B}}^{-1}$.

Donc en particulier, si A est diagonalisable, alors il existe une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $A = PDP^{-1}$.

Inversement, supposons que $A = PDP^{-1}$ où D est diagonale et P est inversible.

Si on prend pour \mathcal{B} la famille $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ où \vec{u}_i est le i -ième vecteur colonne de la matrice P ; comme P est inversible, $\det(P) \neq 0$, \mathcal{B} est une famille libre et est donc une base de \mathbb{K}^n .

Donc en particulier, P est la matrice de passage de Can à \mathcal{B} et D est la matrice de f_A dans la base \mathcal{B} .

Donc A est diagonalisable.

Définition 4

On dit que la matrice A est **semblable** à B s'il existe une matrice inversible P telle que $A = PBP^{-1}$.

Donc on avait montré la proposition importante suivante :

Proposition 2

Une matrice A est diagonalisable si et seulement si elle est semblable à une matrice diagonale.

Remarques (en pratique)

- Si A est diagonalisable et si \mathcal{B} est la base dans laquelle A (ou l'application linéaire qui lui est associée) est représentée par une matrice diagonale D alors

$$A = PDP^{-1}$$

où $P = P_{Can, \mathcal{B}}$ est la matrice de passage de la base canonique Can à \mathcal{B} .

- Diagonaliser une matrice **carrée** A revient à trouver une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $A = PDP^{-1}$. On cherche une base \mathcal{B} , dans laquelle A est représentée par une matrice diagonale D et on prend P la matrice de passage de la base canonique à \mathcal{B} .

Comment peut-on, en pratique, trouver une telle matrice diagonale D ?

Pour cela, quelques notions sont nécessaires ...

VI. 3. Vecteurs propres, valeurs propres

Définition 5 (Vecteurs propres, valeurs propres)

Soit $f \in \text{End}(E)$.

- Un **vecteur** $\vec{u} \in E$ est un **vecteur propre** de f si :
 - $\vec{u} \neq \vec{0}$,
 - il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f(\vec{u}) = \lambda\vec{u}$.
- Un **scalaire** $\lambda \in \mathbb{K}$ est une **valeur propre** de f s'il existe $\vec{u} \in E$ tels que $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $f(\vec{u}) = \lambda\vec{u}$.
- Si \vec{u} est un vecteur propre de f , l'unique scalaire λ vérifiant $f(\vec{u}) = \lambda\vec{u}$ est appelé la **valeur propre associée à \vec{u}** .

Remarque

Si \vec{u} est un vecteur propre de f , alors pour tout scalaire α non nul, $\alpha\vec{u}$ est un vecteur propre de f .

En effet,

$$f(\alpha\vec{u}) = \alpha f(\vec{u}) = \alpha\lambda\vec{u} = \lambda(\alpha\vec{u}).$$

On définit les valeurs propres et les vecteurs propres des matrices, en utilisant les applications linéaires associées.

- Un vecteur $\vec{u} \in E$ est un **vecteur propre** de A s'il est pour l'application linéaire associée.
- De même, un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est une **valeur propre** de A si elle l'est pour l'application linéaire associée.

Cela revient à dire :

- Un vecteur $\vec{u} = (x_1, \dots, x_n) \in E$ est un **vecteur propre** de A si $\vec{u} \neq 0$ et s'il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que :

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

- De même, un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est une **valeur propre** de A s'il existe $\vec{u} = (x_1, \dots, x_n) \in E$ tels que $\vec{u} \neq \vec{0}$ et

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Proposition 3

L'endomorphisme f est diagonalisable, si et seulement si, il existe une base de E formée de vecteurs propres de f .

Preuve

Si f est diagonalisable, alors il existe une base $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ de E telle que

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Donc pour tout $1 \leq i \leq n$, $f(\vec{u}_i) = \lambda_i \vec{u}_i$. D'où \vec{u}_i est un vecteur propre.

Réciproquement, si E admet une base $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ formée de vecteurs propres de f , alors pour tout $1 \leq i \leq n$, il existe λ_i tel que $f(\vec{u}_i) = \lambda_i \vec{u}_i$.

Donc

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

et f est diagonalisable. □

La traduction de la proposition 1 pour les matrices :

Proposition 3 bis

Une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable ssi elle possède n vecteurs propres formant une base de \mathbb{K}^n .

VI. 4. Sous-espaces propres

Rappel

Soient U et V deux s.e.v du \mathbb{K} -e.v E .

- On appelle **somme** de U et V l'ensemble défini par

$$U + V = \{\vec{u} + \vec{v} \mid \vec{u} \in U, \vec{v} \in V\}.$$

- On dit que la somme $U + V$ est **directe** si $U \cap V = \{\vec{0}\}$.
- On dit du s.e.v F qu'il est la **somme directe** de U et V si
 - $F = U + V$;
 - $U \cap V = \{\vec{0}\}$.

On écrit $F = U \oplus V$.

Plus généralement, soient U_1, \dots, U_m , des s.e.v de E . On dit que E est la **somme directe** de U_1, \dots, U_m et on écrit $E = U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_m$ si :

- $E = U_1 + U_2 + \dots + U_m = \{\vec{u}_1 + \dots + \vec{u}_m \mid \vec{u}_i \in U_i\}$,
- pour tout $\vec{u}_1 \in U_1, \vec{u}_2 \in U_2, \dots, \vec{u}_m \in U_m$:
si $\vec{u}_1 + \dots + \vec{u}_m = \vec{0}$ alors $\vec{u}_i = \vec{0}$ pour tout $1 \leq i \leq m$.

Propriété

Soient U_1, \dots, U_m , des s.e.v de E . Pour chaque $1 \leq i \leq m$, soit \mathcal{B}_i une base de U_i . Alors E est la somme directe de U_1, \dots, U_m , si et seulement si, $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \dots \cup \mathcal{B}_m$ est une base de E .

Définition 6

Soit f un endomorphisme de E et soit λ une valeur propre de f . On appelle **sous-espace propre** associé à la valeur propre λ de f , le sous-espace vectoriel

$$E_\lambda(f) = \text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E) = \{\vec{u} \in E \mid f(\vec{u}) = \lambda \vec{u}\}.$$

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et λ une valeur propre de A , on définit d'une façon similaire le **sous-espace propre** associé à la valeur propre λ de A

$$E_\lambda(A) = \{\vec{u} \in E \mid A\vec{u} = \lambda\vec{u}\}.$$

Proposition 4

L'endomorphisme f est diagonalisable, si et seulement si, E est somme directe de ses sous-espaces propres.

Autrement dit, si $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ sont les valeurs propres de f , deux à deux distinctes, f est diagonalisable si et seulement si

$$E = E_{\lambda_1}(f) \oplus \dots \oplus E_{\lambda_m}(f).$$

Corollaire 1

Si $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ sont les valeurs propres de f , deux à deux distinctes, f est diagonalisable si et seulement si

$$\dim(E) = \dim(E_{\lambda_1}(f)) + \dots + \dim(E_{\lambda_m}(f)).$$

Corollaire 2

Si $\dim(E) = n$ et f admet n valeurs propres distinctes, alors f est diagonalisable.

VI. 5. Polynôme caractéristique

Définition 7

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit

$$P_A(X) = \det(A - XI_n).$$

Alors $P_A(X)$ est un polynôme de degré n , appelé le **polynôme caractéristique de A** .

Exemple

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$\begin{aligned} A - XI_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} - X \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 - X & 3 \\ 4 & 2 - X \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On a

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} 1 - X & 3 \\ 4 & 2 - X \end{vmatrix} = (1 - X)(2 - X) - 12 = X^2 - 3X - 10.$$

Soit $f \in \text{End}(E)$. Soient $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ deux bases de E . Alors

$$M_{\mathcal{B}_1}(f) = P^{-1}M_{\mathcal{B}_2}(f)P$$

où P est la matrice de passage de \mathcal{B}_2 à \mathcal{B}_1 . On a

$$\begin{aligned}\det(M_{\mathcal{B}_1}(f) - XI_n) &= \det(P^{-1}M_{\mathcal{B}_2}(f)P - XI_n) \\ &= \det(P^{-1}(M_{\mathcal{B}_2}(f) - XI_n)P) = \det(M_{\mathcal{B}_2}(f) - XI_n).\end{aligned}$$

Cela permet de définir :

Définition 8

Soit $f \in \text{End}(E)$. Soit \mathcal{B} une base de E . On définit le **polynôme caractéristique** de f par :

$$P_f(X) = \det(M_{\mathcal{B}}(f) - XI_n).$$

(Donc il ne dépend pas de la base \mathcal{B}).

Proposition 5

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors λ est une valeur propre de A , si et seulement si, λ est racine du polynôme caractéristique de A .

Preuve

- Si λ est une valeur propre de A , alors il existe \vec{u} avec $\vec{u} \neq 0$ tel que $A\vec{u} = \lambda\vec{u}$. Donc $(A - \lambda I_n)\vec{u} = \vec{0}$. Donc $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible et donc $\det(A - \lambda I_n) = 0$.
- Si $\det(A - \lambda I_n) = 0$, alors $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible et donc il existe \vec{u} avec $\vec{u} \neq 0$ tel que $(A - \lambda I_n)\vec{u} = \vec{0}$ et donc $\vec{u} \neq 0$ tel que $A\vec{u} = \lambda\vec{u}$.
Donc λ est une valeur propre.



Exemple

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

On a

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} 1 - X & 0 \\ 5 & 2 - X \end{vmatrix} = (1 - X)(2 - X).$$

Donc les valeurs propres de A sont 1 et 2.

Rappel sur les polynômes

- Une racine λ d'un polynôme $P(X) \in \mathbb{K}[X]$, est une **racine de multiplicité m** si $(X - \lambda)^m$ divise $P(X)$ mais $(X - \lambda)^{m+1}$ ne divise pas $P(X)$.
- Un polynôme $P(X) \in \mathbb{K}[X]$, de degré n , est dit **scindé dans $\mathbb{K}[X]$** , s'il peut s'écrire sous la forme

$$P(X) = a(X - \lambda_1)^{m_1} \cdots (X - \lambda_p)^{m_p}$$

où $m_i \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{K}^*$, $\lambda_i \in \mathbb{K}$ (et $m_1 + \cdots + m_p = n$).

Exemple

(1) Soit

$$P(X) = X^3 - 5X^2 + 7X - 3.$$

Alors

$$P(X) = (X - 1)^2(X - 3).$$

La multiplicité de la racine $\lambda_1 = 1$ est 2 et la multiplicité de la racine $\lambda_2 = 3$ est 1. On voit aussi que P est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ mais aussi dans $\mathbb{C}[X]$.

(2) Le polynôme $P(X) = X^2 + X + 1$ n'est pas scindé dans $\mathbb{R}[X]$ car il n'admet pas de racine réelle. Par contre il est scindé dans $\mathbb{C}[X]$:

$$P(X) = (X - j)(X - \bar{j}) \text{ où } j = e^{i\pi/3}.$$

Définition 9

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de A .

- La **multiplicité algébrique** de λ est la multiplicité de λ comme racine de $P_A(X)$.
- La **multiplicité géométrique** de λ est la dimension du sous-espace propre $E_\lambda(A)$.

VI. 6. Diagonalisation

Théorème (CNS pour la diagonalisation)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors A est diagonalisable si et seulement si les propriétés suivantes sont satisfaites :

- Le polynôme caractéristique $P_A(X)$ est scindé dans $\mathbb{K}[X]$: dans ce cas

$$P_A(X) = (-1)^n (X - \lambda_1)^{m_1} \cdots (X - \lambda_p)^{m_p}$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont les valeurs propres ; m_i est la multiplicité algébrique de λ_i .

- Pour chaque valeur propre λ_i , sa multiplicité algébrique coïncide avec sa multiplicité géométrique : $\dim(E_{\lambda_i}(A)) = m_i$.

- On calcule le polynôme caractéristique $P_A(X)$.
- On cherche les racines de $P_A(X)$, $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, et les multiplicités algébriques m_1, \dots, m_p .
 - Si $P_A(X)$ n'est pas scindé, alors A n'est pas diagonalisable.
 - Si $P_A(X)$ est scindé, on cherche les bases des sous-espaces propres $E_{\lambda_i}(A)$. Si pour chaque i , $\dim(E_{\lambda_i}(A)) = m_i$, alors A est diagonalisable :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \lambda_1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \ddots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_p & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \lambda_p \end{pmatrix}.$$

où chaque λ_i est répété m_i -fois.

Dans ce cas, si \mathcal{B}_i est une base de $E_{\lambda_i}(A)$, alors $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_p$ est une base de \mathbb{K}^n formée de vecteurs propres de A . On a alors $A = PDP^{-1}$ où P est la matrice de passage de la base canonique à \mathcal{B} .

Exemples

(1) Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

On a

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} 1 - X & -3 \\ 3 & 4 - X \end{vmatrix} = X^2 - 5X + 13.$$

Le discriminant est strictement négatif et donc $P_A(X)$ n'admet pas de racines dans \mathbb{R} . Donc A n'est pas diagonalisable dans \mathbb{R} .

(2) Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

On a

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} 1 - X & 2 \\ -1 & 4 - X \end{vmatrix} = X^2 - 5X + 6 = (X - 2)(X - 3)$$

et donc les valeurs propres sont $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 3$.

Comme $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $P_A(X)$ admet deux racines distinctes, A est diagonalisable (on applique ici le corollaire 2). La matrice diagonale est

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

On a

$$E_{\lambda_1}(A) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\} = \text{Vect}((2, 1))$$

$$E_{\lambda_2}(A) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\} = \text{Vect}((1, 1)).$$

En posant $\vec{u} = (2, 1)$, $\vec{v} = (1, 1)$, $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v})$ est une base de \mathbb{R}^2 formée de vecteurs propres de A . La matrice de passage de la base canonique à \mathcal{B} est

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a

$$A = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

(3) Soit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Polynôme caractéristique : on a

$$\begin{aligned} P_A(X) &= \begin{vmatrix} 3-X & 0 & -1 \\ 2 & 4-X & 2 \\ -1 & 0 & 3-X \end{vmatrix} = (4-X) \begin{vmatrix} 3-X & -1 \\ -1 & 3-X \end{vmatrix} \\ &= (2-X)(4-X)^2. \end{aligned}$$

Donc A possède deux valeurs propres : 2 de multiplicité algébrique 1 (on dit qu'elle est simple) et 4 de multiplicité algébrique 2 (on dit qu'elle est double). En plus P_A est scindé.

2. Sous-espaces propres : on a

$$E_2(A) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\}.$$

$$E_4(A) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\}.$$

En résolvant le système homogène $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, par la méthode de Gauss par exemple, on obtient

$$E_2(A) = \text{Vect}(\vec{u}), \text{ où } \vec{u} = (1, -2, 1).$$

De même

$$E_4(A) = \text{Vect}(\vec{v}, \vec{w}), \text{ où } \vec{v} = (0, 1, 0), \vec{w} = (1, 0, -1).$$

Donc la multiplicité géométrique de la valeur propre 2 est 1 et celle de la valeur propre 4 est 2.

3. Diagonalisabilité : comme P_A est scindé et la multiplicité algébrique de chaque valeur propre coïncide avec sa multiplicité géométrique, A est diagonalisable.

4. Diagonalisation : on a

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, A = PDP^{-1}.$$

VI. 7. Théorème de Cayley-Hamilton

Soit E un \mathbb{K} -e.v et $P \in \mathbb{K}[X]$

$$P(X) = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0.$$

Si $f \in \text{End}(E)$, on note $P(f)$ l'endomorphisme de E défini par

$$P(f) = a_n f^n + \cdots + a_1 f + a_0 \text{Id}_E,$$

où $f^k = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{k\text{-fois}}$.

De même si $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$, alors $P(A)$ est définie par

$$P(A) = a_n A^n + \cdots + a_1 A + a_0 I_m.$$

Théorème (Théorème de Cayley-Hamilton)

Soit $f \in \text{End}(E)$ (resp. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) et $P_f(X)$ son polynôme caractéristique (resp. $P_A(X)$). Alors $P_f(f) = 0$ (resp. $P_A(A) = 0$).

Exemple

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Son polynôme caractéristique est

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} 1 - X & 3 \\ 4 & 1 - X \end{vmatrix} = (1 - X)^2 - 8 = X^2 - 2X - 7.$$

D'après le théorème, on a

$$A^2 - 2A - 7I_2 = \text{la matrice nulle}.$$

Cela permet par exemple de calculer A^2 en utilisant A et la matrice identité I_2 .

On a aussi

$$A \cdot \left(\frac{1}{7}(A - 2I_2)\right) = I_2$$

et on déduit que $A^{-1} = \frac{1}{7}(A - 2I_2)$.