COURS 2

Théorème de la base incomplète (version en dimension finie)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $\mathcal{U} = \{\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_n\}$ une famille libre de E et soit $\mathcal{G} = \{\vec{g}_1, \cdots, \vec{g}_m\}$ une famille génératrice de E.

Alors il existe $\vec{g}_{i_1}, \cdots, \vec{g}_{i_p}$ de $\mathcal{G}$ telle que la famille $\{\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_n, \vec{g}_{i_1}, \cdots, \vec{g}_{i_p}\}$ forme une base de E.

Preuve

Posons $\mathcal{U}_0 = \mathcal{U}$ et définissons par récurrence sur $k \geq 1$, $\mathcal{U}_k$ de la façon suivante :

- si $\mathcal{U}_k \cup \{\vec{g}_k\}$ est libre alors $\mathcal{U}_{k+1} = \mathcal{U}_k \cup \{\vec{g}_k\}$;
- sinon $\mathcal{U}_{k+1} = \mathcal{U}_k$.

Alors par construction (preuve par récurrence) $\mathcal{U}_k$ est libre, $\mathcal{U}_k \subseteq \mathcal{U} \cup \mathcal{G}$ et $Vect(\mathcal{U}_k) = Vect(\mathcal{U} \cup \{\vec{g}_1, \cdots, \vec{g}_k\})$. Donc $Vect(\mathcal{U}_m) = E$ et $\mathcal{U}_m$ vérifie les propriétés recherchées. □

Corollaire 1

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie n. Alors :

- Toute famille libre a au plus n éléments.
- Toute famille génératrice a au moins n éléments.
- Toute famille libre peut être complétée en une base de E.

□

Corollaire 2

Soit B une famille de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-e.v E de dimension finie n. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- B est une base de E ;
- B est une famille libre à n éléments ;
- B est une famille génératrice à n éléments.

□

Exemple récapitulatif

Considérons dans $\mathbb{R}^3$ la famille $\mathcal{U}$ des deux vecteurs

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Alors $\mathcal{U}$ est une famille libre. En effet, soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0}$. Alors

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha + 3\beta = 0 \\ \alpha - \beta = 0 \\ -\alpha + \beta = 0 \end{cases}$$

Donc $\alpha = \beta$ et $5\alpha = 0$. Par conséquent $\alpha = \beta = 0$.

On peut compléter la famille libre $\mathcal{U}$ par des éléments de *la base canonique* $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ pour former une base de E.
On peut choisir par exemple $\vec{e}_1$. Vérifions si $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{e}_1\}$ est libre. Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{e}_1 = \vec{0}$. On obtient $2\alpha + 3\beta + \gamma = 0$ et $\alpha = \beta$. Donc $\gamma = -5\alpha$ et $\alpha = \beta$. Par conséquent la famille $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{e}_1\}$ n'est pas libre.
Choisisons $\vec{e}_2$. Vérifions si $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{e}_2\}$ est libre. Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{e}_2 = \vec{0}$. On obtient $2\alpha + 3\beta = 0$, $\alpha - \beta + \gamma = 0$ et $\alpha = \beta$. Donc $\alpha = \beta = \gamma = 0$, par conséquent la famille $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{e}_2\}$ est libre.
Comme $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ et comme $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{e}_2\}$ est une famille libre constituée de trois vecteurs, elle forme une base.

Théorème (Coordonnées d'un vecteur)

Soit $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ une base du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
Alors pour tout $\vec{u} \in E$, il existe des uniques scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$\vec{u} = \lambda_1\vec{u}_1 + \cdots + \lambda_n\vec{u}_n.$$

Définition des coordonnées d'un vecteur

Soit $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ une base du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et soit $\vec{u} \in E$. Les uniques scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ qui vérifient

$$\vec{u} = \lambda_1\vec{u}_1 + \cdots + \lambda_n\vec{u}_n$$

sont appelés les composantes ou les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $\mathcal{B}$.

On écrira

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

Remarques

- Remarquons que nous avons introduit un ordre sur les vecteurs $\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_n$, nous avons noté la base $\mathcal{B}$ d'une façon ordonnée $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$.
  Une permutation des vecteurs donnerait la même base, mais introduirait également une permutation sur les coordonnées.
- La notation en *vecteurs colonnes* des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ exprime les *coordonnées* dans la base canonique $Can = (\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n)$:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{Can}$$

Proposition 1 (Formule de Grassmann)

Soient F et G deux s.e.v d'un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie. On a

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

II. Applications linéaires

II. 1. Définitions, propriétés

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f : E \to F$ une application.
Alors f est linéaire si f transforme l'addition de E en celle de F et la multiplication scalaire de E en celle de F.

Définition 1

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-e.v et $f : E \to F$ une application. On dit que f est une application linéaire si

- pour tous $\vec{u}, \vec{v} \in E$, $f(\vec{u} + \vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$
- pour tout $\vec{u} \in E$, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $f(\lambda \vec{u}) = \lambda f(\vec{u})$

Les deux propriétés précédentes peuvent être réunies en une seule pour obtenir la caractérisation pratique suivante :

Caractérisation équivalente pratique

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-e.v et $f : E \to F$ une application.
Alors f est linéaire ssi pour tous $\vec{u}, \vec{v} \in E$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$f(\lambda \vec{u} + \vec{v}) = \lambda f(\vec{u}) + f(\vec{v})$$

Propriétés

Si $f : E \to F$ est linéaire alors :

- $f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$;
- $f(\lambda_1 \vec{u}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{u}_n) = \lambda_1 f(\vec{u}_1) + \cdots + \lambda_n f(\vec{u}_n)$, pour tous $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ et $\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_n \in E$.

Exemple 1

Soit $\alpha \in \mathbb{K}$ et $f : E \to E$ l'homothétie de rapport α

$$\vec{u} \mapsto f(\vec{u}) = \alpha \vec{u}.$$

Alors f est linéaire. En effet, soient $\vec{u}, \vec{v} \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors

$$\begin{aligned} f(\lambda \vec{u} + \vec{v}) &= \alpha(\lambda \vec{u} + \vec{v}) \\ &= \lambda \alpha \vec{u} + \alpha \vec{v} \\ &= \lambda f(\vec{u}) + f(\vec{v}). \end{aligned}$$

Exemple 2

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y) = (x - y, x + y).$$

Alors f est linéaire. En effet, pour tous $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$f(\lambda \vec{u} + \vec{v}) = f(\lambda x + x', \lambda y + y') = \Big((\lambda x + x') - (\lambda y + y'), (\lambda x + x') + (\lambda y + y')\Big)$$

$$(\lambda x - \lambda y, \lambda x + \lambda y) + (x' - y', x' + y') = \lambda f(\vec{u}) + f(\vec{v}).$$

Exemple 3

Soit E l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^∞. L'application

$$D : E \to E,\ D(f) = f'$$

est une application linéaire. En effet :

- $D(\vec{0}) = \vec{0}$.
- Soient $f, g \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} D(\lambda f + g) &= (\lambda f + g)' \\ &= \lambda f' + g' \\ &= \lambda D(f) + D(g). \end{aligned}$$

Exemple 4

Une rotation R d'un angle θ autour de l'origine dans $\mathbb{R}^2$ est une application linéaire.
En effet, on a

$$\text{pour } \vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ R(\vec{u}) = \begin{pmatrix} \cos\theta\ x - \sin\theta\ y \\ \sin\theta\ x + \cos\theta\ y \end{pmatrix}$$

et donc

$$R(\vec{u} + \vec{v}) = R(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \cos\theta\ (x + x') - \sin\theta\ (y + y') \\ \sin\theta\ (x + x') + \cos\theta\ (y + y') \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta\ x - \sin\theta\ y \\ \sin\theta\ x + \cos\theta\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\theta\ x' - \sin\theta\ y' \\ \sin\theta\ x' + \cos\theta\ y' \end{pmatrix} = R(\vec{u}) + R(\vec{v}).$$

De même on a $R(\lambda\vec{u}) = \lambda\vec{u}$.

Exercice

Montrer que toutes les applications linéaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont des homothéties.

Proposition 2

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-e.v. Alors l'ensemble des applications linéaires de E dans F, noté $\mathcal{L}(E, F)$, muni des opérations

$$(f, g) \mapsto (f + g)(x) = f(x) + g(x);\ \ (\lambda, f) \mapsto (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

est un $\mathbb{K}$-e.v. □

II. 2. Image et noyau

Définition 2

Soit $f : E \to F$ une application linéaire.
On appelle :

- Image de f, le s.e.v de F :
$$Im(f) = f(E) = \{f(x) \mid x \in E\}$$
- Noyau de f, le s.e.v de E :
$$Ker(f) = f^{-1}(\vec{0}) = \{\vec{u} \in E \mid f(\vec{u}) = \vec{0}\}$$

Exercice

Montrer que $Im(f)$ et $Ker(f)$ sont effectivement des sous-espaces vectoriels.

Exemple

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par
$$f(x, y) = (x - y, x + y).$$
Alors f est linéaire (déjà vérifié).

Montrons que $Ker(f) = \{\vec{0}\}$ et $Im(f) = \mathbb{R}^2$.

- Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Alors
$$\vec{u} \in Ker(f) \Leftrightarrow f(\vec{u}) = \vec{0} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - y = 0 \\ x + y = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array} \right.$$
et donc $\vec{u} = \vec{0}_{\mathbb{R}^2}$.
- Soit $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Alors
$$\vec{v} \in Im(f) \Leftrightarrow \exists (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } \left\{ \begin{array}{l} x - y = a \\ x + y = b \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{a+b}{2} \\ y = \frac{b-a}{2} \end{array} \right.$$
et donc $\vec{v} \in Im(f)$.

Propriété

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Soit $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ une base de E. Alors
$$Im(f) = Vect(f(\vec{u}_1), \dots, f(\vec{u}_n)).$$

Proposition 3

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
(1) Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- f est injective ;
- $Ker(f) = \{\vec{0}\}$;

(2) Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- f est surjective ;
- Im(f)=F.

Définition 3

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-e.v et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. La dimension de Im(f) est appelée le rang de f et est notée $rg(f)$.

Théorème (Théorème du rang)

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On a

$$\dim(E) = rg(f) + dim(Kerf(f)).$$

Définition 4 (Un peu de terminologie)

- Une application linéaire de E dans E est appelée un endomporphisme. Le $\mathbb{K}$-e.v $\mathcal{L}(E, E)$ est noté $\mathcal{L}(E)$.
- Une application linéaire bijective est appelée un isomorphisme.
- Un endomorphisme bijective est appelé un automorphisme.

III. Matrices

III. 1. Définitions, propriétés

Définition 5

On appelle matrice tout tableau de la forme

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

où a_{ij} sont des scalaires (des éléments de $\mathbb{K}$).

- On note
$$M = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m},$$
a_{ij} est le coefficient : intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne.
- M est dite de taille $n \times m$ (elle a n lignes et m colonnes).

Exemples

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 7 \\ 13 & 10 & 8 \end{pmatrix} ; \ B = \begin{pmatrix} i & 3 \\ 25 & 1+i \\ 21 & 11 \end{pmatrix} ; \ C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

A est une matrice à coefficients dans $\mathbb{R}$ (mais dans $\mathbb{C}$ aussi) ; B est une matrice à coefficients dans $\mathbb{C}$.

Définition 5

On dit que M est une matrice

- colonne si elle a une seule colonne ($m = 1$).
- ligne si elle a une seule ligne ($n = 1$).
- carrée si elle a le même nombre de lignes que de colonnes ($n = m$).

Exemples

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 7 \\ 13 & 10 & 8 \end{pmatrix} ; \ B = \begin{pmatrix} i & 3 & 5 \end{pmatrix} ; \ C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

A est une matrice carrée
B est une matrice ligne
C est une matrice colonne

Remarques & notations

- Une matrice à n lignes et m colonnes est aussi appelée matrcie de type (n, m) ou encore matrice $n \times m$.
- On note $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices $n \times m$.
- On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées $n \times n$.

Remarques & notations

- La matrice identité $I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est la matrice carrée dont tous les coefficients diagonaux valent 1 et les autres coefficients valent 0. Exemple :

$$I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- La matrice nulle $O_{n,m} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ est la matrice dont tous les coefficients sont nuls.
  Exemple :

$$O_{3,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Définition 6 (Somme de deux matrices)

Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq n; 1\leq j\leq m}$, $B = (b_{ij})_{1\leq i\leq n; 1\leq j\leq m}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} ; \; B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{pmatrix}$$

On définit la somme $A + B$, une matrice de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, par

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{1\leq i\leq n; 1\leq j\leq m}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1m}+b_{1m} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2m}+b_{2m} \\ \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \cdots & a_{nm}+b_{nm} \end{pmatrix}$$

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} ; \; B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$$

Remarque

On ne somme que des matrices de même taille.

Définition 7 (Multiplication par un scalaire)

Soient $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq n; 1\leq j\leq m}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

On définit la matrice λA, une matrice de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, par

$$\lambda A = (\lambda a_{ij})_{1\leq i\leq n; 1\leq j\leq m}$$

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1m} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2m} \\ \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \cdots & \lambda a_{nm} \end{pmatrix}$$

Exemples

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}; \; \pi B = \begin{pmatrix} 5\pi & 6\pi \\ 7\pi & 8\pi \end{pmatrix}$$

Proposition 4

L'ensemble $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ muni de l'addition des matrices $(A, B) \mapsto A + B$ et de la multiplication par des scalaires $(\lambda, A) \mapsto \lambda A$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \times m$.
Le vecteur nul de cet espace est la matrice nulle $O_{n,m}$.

Exemple & exercice

Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ on considère la famille $\mathcal{B} = (A_1, A_2, A_3, A_4)$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \; A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \; A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \; A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

Définition 8 (Produit de deux matrices)

Soient $A = (a_{ij})_{1 \le i \le n, 1 \le j \le p}$ une matrice $n \times p$ et $B = (b_{ij})_{1 \le i \le p, 1 \le j \le m}$ une matrice $p \times m$.
Le produit de A et B est la matrice $n \times m$, notée $A \cdot B$, dont les coefficients c_{ij} sont définis par : c_{ij} est le produit scalaire de la $i^{\text{ème}}$ ligne de A par la $j^{\text{ème}}$ colonne de B

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{pj} \end{pmatrix} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj}$$

Exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = (1 \times 4 + 2 \times 5 + 3 \times 6) = (32).$$

Exemple

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \times 0 + 2 \times 1 & 1 \times 2 + 2 \times 2 \\ 3 \times 0 + 4 \times 1 & 3 \times 2 + 4 \times 2 \\ 5 \times 0 + 6 \times 1 & 5 \times 2 + 6 \times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 14 \\ 6 & 22 \end{pmatrix} \end{array}$$

Remarques

(1) Pour que le produit de A par B ait un sens if faut que le nombre de colonnes de A soit le même que le nombre de lignes de B.
(2) Le produit d'une matrice de type (n, p) par une matrice de type (p, m) est une matrice de type (n, m).

Remarques

(1) On a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ce qui prouve qu'en général $A \cdot B \neq B \cdot A$ et $A \cdot B = O$ n'implique pas forcément $A = O$ ou $B = O$ (O désigne la matrice nulle).
(2) Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on a (exercice)

$$A \cdot I_n = I_n \cdot A = A.$$

Propoiétés

Les propriétés suivantes sont vraies sous hypothèse que les produits considérés ont un sens :

- $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$;
- $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$;
- $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$;
- $\lambda(A \cdot B) = (\lambda A) \cdot B = A \cdot (\lambda B)$.

Notations & conventions

Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$$A^0 = I_n, \quad A^1 = A, \quad A^n = \underbrace{A \cdot A \cdots A}_{n \text{ fois}}.$$

Remarque

On a

$$(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$$

et si $AB \neq BA$ alors

$$(A + B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2.$$

Proposition 5 (Formule du binôme pour les matrices)

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tels que $AB = BA$.
Alors pour tout $n \geq 0$ on a

$$(A + B)^n = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} A^{n-k} B^k$$

où $\binom{n}{k}$ est le coefficient binomial.

III. 3. Matrice de passage

Définition 9

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie n et soit $\mathcal{B}_1 = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base de E. Soit $\vec{u} \in E$ ayant comme composantes dans la base $\mathcal{B}$, $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. (Donc $\vec{u} = \lambda_1\vec{e}_1 + \dots + \lambda_n\vec{e}_n$).
On appelle matrice des composantes du vecteur $\vec{u}$ dans la base $\mathcal{B}$, la matrice colonne

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

On écrit

$$M_{\mathcal{B}}(\vec{u}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

Définition 9 (suite)

Plus généralement, soit $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m)$ une famille de vecteurs de E.
On appelle matrice des composantes de la famille $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m)$ dans la base $\mathcal{B}$, la matrice $n \times m$ dont les colonnes sont $M_{\mathcal{B}}(\vec{u}_1), \dots, M_{\mathcal{B}}(\vec{u}_m)$.
Elle est notée $M_{\mathcal{B}}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m)$.

Exemple

Soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Alors

$$M_{\mathcal{B}}(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = I_n.$$

Définition 10

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie n. Soient $\mathcal{B}_1 = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ et $\mathcal{B}_2 = (\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n)$ deux bases de E.

On appelle matrice de passage de la base $\mathcal{B}_1$ à la base $\mathcal{B}_2$, la matrice carrée $n \times n$, $M_{\mathcal{B}_1}(\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n)$.
Elle est notée $P_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}$.

Donc c'est la matrice dont la $j^{\text{ème}}$ colonne est formée des composantes de $\vec{f}_j$ dans la base $\mathcal{B}_1$.
C'est donc la matrice carrée $n \times n$, $A = (a_{ij})_{1 \le i \le n, 1 \le j \le n}$ tel que pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$

$$\vec{f}_j = a_{1j}\vec{e}_1 + \dots + a_{nj}\vec{e}_n.$$

Exemple

Dans $\mathbb{R}^2$ considérons les deux bases $\mathcal{B}_1 = (\vec{u}, \vec{v})$ et $\mathcal{B}_2 = (\vec{w}, \vec{r})$ où

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \ \vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Calculons la matrice $P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}$. Les composantes de $\vec{w}$ et $\vec{r}$ dans $\mathcal{B}_1$ sont (exercice)

$$\vec{w} = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}, \ \vec{r} = -\vec{u} + \vec{v}.$$

Donc

$$M_{\mathcal{B}_1}(\vec{w}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \ M_{\mathcal{B}_1}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Proposition 5

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie et soient $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux bases de E. Alors pour tout $\vec{u} \in E$

$$M_{\mathcal{B}_1}(\vec{u}) = P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2} \cdot M_{\mathcal{B}_2}(\vec{u}).$$

Exemple

Reprenons l'exemple précédent : $\mathcal{B}_1 = (\vec{u}, \vec{v}), \ \mathcal{B}_2 = (\vec{w}, \vec{r})$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \ \vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

On avait trouvé

$$P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit $\vec{f} = \vec{w} + \vec{r}$ et calculons ses composantes dans la base $\mathcal{B}_1$. On a

$$M_{\mathcal{B}_2}(\vec{f}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad M_{\mathcal{B}_1}(\vec{f}) = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$$

III. 4. Matrice d'une application linéaire

Définition 11

Soient E et F des $\mathbb{K}$-e.v munis respectivement des bases $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ et $\mathcal{C} = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire.

On appelle matrice de f, par rapport aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, la matrice

$$M_{\mathcal{C}}(f(\vec{u}_1), \dots, f(\vec{u}_n)).$$

Elle est notée $M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$.

Exemple

On munit $\mathbb{R}^3$ de la base canonique, notée ici $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ et $\mathbb{R}^2$ de la base canonique, notée ici $\mathcal{C} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par

$$f(x, y, z) = (x + 2y - z, x - y).$$

On a

$$f(\vec{u}_1) = (1, 1) = \vec{v}_1 + \vec{v}_2,\ f(\vec{u}_2) = (2, -1) = 2\vec{v}_1 - \vec{v}_2,$$
$$f(\vec{u}_3) = (-1, 0) = -\vec{v}_1 + 0 \cdot \vec{v}_2.$$

Donc

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$