Chapitre 3 : Notions sur les équations aux dérivées partielles

Mathématiques 3, 2019

Notions sur les équations aux dérivées partielles

Quelques rappels

Pour étudier les phénomènes réels, on utilise les lois de la physique : mécanique, électromagnétisme, acoustiques, thermodynamiques, quantiques, relativistes, etc.

Cette étude se traduit généralement par une modélisation mathématique par des équations différentielles ordinaires ou par des *équations aux dérivées partielles*.

Quelques rappels

Définition 1

Soit $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application. Si la limite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a_1, \cdots, a_{i-1}, a_i + h, a_{i+1}, \cdots, a_n) - f(a_1, \cdots, a_n)}{h},$$

existe et finie, on l'appelle la i-ème dérivée partielle de f au point $(a_1, \cdots, a_n) \in D$ et on la note $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, \cdots, a_n)$.

Si pour tout $\bar{a} = (a_1, \cdots, a_n) \in D$, f admet une i-ème dérivée partielle au point $\bar{a}$, l'application $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} : \bar{a} \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, \cdots, a_n)$ est appelée la i-ème dérivée partielle de f (ou souvent la dérivée partielle par rapport à la variable x_i).

Quelques rappels

Exemple 1

Considérons la fonction $f(x, y) = xy$. On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{(a+h)b - ab}{h} = b, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{b + h - ab}{h} = a.$$

Remarque

Dans la pratique, pour calculer une dérivée partielle par rapport à la variable x_i, on fixe les autres variables et on calcule la dérivée au sens usuel où la variable est x_i. Dans l'exemple précédent,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = (xy)' \text{ (où } y \text{ est considérée comme une constante) } = y,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = (xy)' \text{ (où } x \text{ est considérée comme une constante) } = x.$$

Définition 2

Soit $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application. Si toutes les dérivées partielles de f existent en un point $\bar{a} = (a_1, \cdots, a_n) \in D$, alors on appelle gradient de f au point $\bar{a}$ le vecteur

$$\nabla f(a_1, \cdots, a_n) = \Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, \cdots, a_n), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a_1, \cdots, a_n)\Big)$$

Exemple 1 (suite)

On a

$$\nabla f(a, b) = (b, a).$$

Définition 3

La dérivée partielle de f d'ordre j par rapport aux variables $x_{i_1}, \ldots, x_{i_j}$ est définie par

$$\frac{\partial^j f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_j}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_1}}\Big(\frac{\partial^{j-1} f}{\partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_j}}\Big).$$

Exemple 2

Considérons la fonction $f(x,y) = x^4 + y^3$. Alors, les dérivées d'ordre 2 sont

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)) = 12x^2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)) = 6y,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 0.$$

Quelques rappels

Définition 4

Le Laplacian d'une fonction $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est

$$\Delta f(\bar{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\bar{x}) + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\bar{x}).$$

Une équation aux dérivées partielles (EDP en abrégé) est une relation entre une fonction de plusieurs variables $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et ses dérivées partielles :

$$(E) \qquad F\left(\bar{x}, u, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_i}, \cdots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \cdots, \frac{\partial^m u}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_m}}\right) = 0$$

où m est le degré de l'équation.

Le problème est posé sur un domaine $D \subseteq \mathbb{R}^n$. On cherche des applications $u : \overline{D} \to \mathbb{R}$ vérifiant l'équation (E) et satisfaisant des conditions initiales et des conditions sur le bord ∂D.

La forme générale d'une équation aux dérivées partielles linéaire d'ordre 2 à coefficients constants est

$$(E) \qquad \alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \gamma\frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} + \delta\frac{\partial u}{\partial x} + \epsilon\frac{\partial u}{\partial y} + \zeta u = f,$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \epsilon, \zeta$ sont des constantes et $f : D \to \mathbb{R}$ est une application appelée le second membre de l'équation.

On dit que l'equation (E) est :

- *elliptique* si $\beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$,
- *parabolique* si $\beta^2 - 4\alpha\gamma = 0$,
- *hyperbolique* si $\beta^2 - 4\alpha\gamma < 0$.

Exemples

- L'équation des ondes $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ est hyperbolique.
- L'équation de Laplace (ou Poisson) $\Delta u = 0$ ou $\Delta u = f$ est elliptique.
- L'équation de la chaleur $\dfrac{\partial u}{\partial t} - c \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ est parabolique ($c > 0$).

Équation des ondes

La propagation d'une onde sur une corde infinie est modélisée par l'équation des ondes sur $\mathbb{R}$

$$(EO1) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & \forall x \in \mathbb{R}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x), & \forall x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

où c est la vitesse de propagation de l'onde et les fonctions u_0 et u_1 sont respectivement, l'état et la vitesse initiale (conditions initiales).

Équation des ondes : formule de D'Alembert

Théorème 1 (Formule de D'Alembert)

Supposons que u_0 est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et que u_1 est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Alors il existe une unique solution de $(EO1)$ donnée par

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\Big(u_0(x+ct) + u_0(x-ct)\Big) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} u_1(y)\,dy$$

appelée la formule de D'Alembert.

Équation des ondes : conditions aux limites

On s'intéresse maintenant à la propagation d'une onde sur une demi-corde (infinie). Elle est modélisée par l'équation des ondes avec une condition de frontière :

$$(EO2) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & \forall x > 0, \quad \forall t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & \forall x > 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x), & \forall x > 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0, & \forall t > 0, \end{cases}$$

où c est la vitesse de propagation de l'onde et les fonctions u_0 et u_1 sont respectivement, l'état et la vitesse initiale. Physiquement, la condition de frontière s'interprète comme une paroi réfléchissante.

Équation des ondes : conditions aux limites et formule de D'Alembert

Théorème 2 (Formule de D'Alembert)

Supposons que u_0 est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et que u_1 est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Alors il existe une unique solution de $(EO2)$ donnée par

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\Big(u_0(x+ct) + u_0(ct-x)\Big) + \frac{1}{2c}\int_0^{x+ct} u_1(y)\,dy$$

$$+\frac{1}{2c}\int_0^{ct-x} u_1(y)\,dy.$$

appelée la formule de D'Alembert.

Équation des ondes : solutions à variables séparées

La séparation des variables consiste à chercher des solutions où on sépare les variables x et t, sous la forme

$$u(x,t) = F(x)G(t).$$

On cherche donc les solutions qu'on appelle à variables séparées de l'équation des ondes. On suppose donc qu'il existe des fonctions F et G telles que

$$u(x,t) = F(x)G(t).$$

On a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = FG'', \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F''G$$

et en remplaçant dans l'équation, on obtient

$$FG'' = c^2 F'' G.$$

Équation des ondes : solutions à variables séparées

En supposant en plus que $F(x) \neq 0$ et $G(t) \neq 0$, on obtient

$$c^2 \frac{F''(x)}{F(x)} = \frac{G''(t)}{G(t)}.$$

Comme la fonction de gauche dépend uniquement de x et celle de droite uniquement de t, il existe un réel $\lambda \in \mathbb{R}$, tel que

$$c^2 \frac{F''(x)}{F(x)} = \lambda, \quad \frac{G''(t)}{G(t)} = \lambda.$$

Donc on obtient les équations différentielles linéaires ordinaires suivantes :

$$c^2 F''(x) - \lambda F(x) = 0,$$

$$G''(t) - \lambda G(t) = 0.$$

On distingue alors les trois cas suivants :

- si $\lambda = 0$, alors
$$F(x) = ax + b,\ G(t) = \alpha t + \beta.$$
- si $\lambda > 0$, alors
$$F(x) = ae^{\frac{\sqrt{\lambda}}{c}x} + be^{-\frac{\sqrt{\lambda}}{c}x},\ \ G(t) = \alpha e^{\sqrt{\lambda}t} + be^{-\sqrt{\lambda}t}.$$
- si $\lambda < 0$, alors
$$F(x) = a\cos(\frac{\sqrt{-\lambda}}{c}x) + b\sin(-\frac{\sqrt{-\lambda}}{c}x),$$
$$G(t) = a\cos(\sqrt{-\lambda}t) + b\sin(\sqrt{-\lambda}t).$$

En tenant compte des conditions initiales et des conditions aux limites, on détermine le cas qui se produit et les solutions de l'équation.

Équation des ondes : séries de Fourier

On cherche les solutions L-périodiques de l'équations des ondes :

$$(EO3) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & \forall x \in \mathbb{R}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x), & \forall x \in \mathbb{R}, \\ u(x,t) = u(x+L,t), & \end{cases}$$

où on suppose que les fonctions u_0 et u_1 sont périodiques et admettent un développement en séries de Fourier ($\omega = \frac{2\pi}{L}$)

$$u_0(x) = \frac{a_{0,0}}{2} + \sum_{n \geq 1} (a_{0,n} \cos(n\omega x) + b_{0,n} \sin(n\omega x))$$

$$u_1(x) = \frac{a_{1,0}}{2} + \sum_{n \geq 1} (a_{1,n} \cos(n\omega x) + b_{1,n} \sin(n\omega x))$$

Équation des ondes : séries de Fourier

Supposons que la solution $u(x,t)$ soit développable en séries de Fourier

$$u(x,t) = \frac{a_0(t)}{2} + \sum_{n\geq 1}(a_n(t)\cos(n\omega x) + b_n(t)\sin(n\omega x)).$$

En dérivant terme à terme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{a_0''(t)}{2} + \sum_{n\geq 1}(a_n''(t)\cos(n\omega x) + b_n''(t)\sin(n\omega x)),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sum_{n\geq 1} -(n\omega)^2\Big(a_n(t)\cos(n\omega x) + b_n(t)\sin(n\omega x)\Big).$$

Équation des ondes : séries de Fourier

Par identification

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{a_0''(t)}{2} + \sum_{n\geq 1} \Big(\left(a_n''(t) + (cn\omega)^2 a_n(t)\right) \cos(n\omega x)$$

$$+ \left(b_n''(t) + (cn\omega)^2 b_n(t)\right) \sin(n\omega x) \Big) = 0$$

et en tenant compte des conditions initiales, on obtient

$$a_0''(t) = 0, \;\; a_0(0) = a_{0,0}, \;\; a_0'(0) = a_{1,0}$$

$$a_n''(t) + \lambda_n^2 a_n(t) = 0, \;\; a_n(0) = a_{0,n}, \;\; a_n'(0) = a_{1,n},$$

$$b_n''(t) + \lambda_n^2 b_n(t) = 0, \;\; b_n(0) = b_{0,n}, \;\; b_n'(0) = b_{1,n},$$

où $\lambda_n = cn\omega$.

Équation des ondes : séries de Fourier

En résolvant les équations différentielles ordinaires précédentes, on obtient

$$a_0(t) = a_{1,0}t + a_{0,0},$$

$$a_n(t) = a_{0,n}\cos(\lambda_n t) + \frac{a_{1,n}}{\lambda_n}\sin(\lambda_n t),$$

$$b_n(t) = b_{0,n}\cos(\lambda_n t) + \frac{b_{1,n}}{\lambda_n}\sin(\lambda_n t),$$

et donc la solution $u(x,t)$.

Équation des ondes : séries de Fourier

Exercice

Calculer les solutions 2-périodiques de l'équation des ondes, avec

$$u_0(x) = \begin{cases} x & si \quad x \in [0, 1[, \\ 2 - x & si \quad x \in [1, 2[, \end{cases}$$

et $u_1(x) = 0$.

Équation de Laplace, Équation de Poisson

On considère l'équation de Laplace

$$\Delta u = 0,$$

et l'équation de Poisson

$$\Delta u = \rho.$$

Équation de Laplace : solutions à variables séparées

On cherche des solutions de l'équation de Laplace

$$\Delta u(x,y) = 0, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

à variables séparées. On suppose donc qu'il existe deux fonctions $F(x)$ et $G(y)$ telles que

$$u(x,y) = F(x)G(y).$$

En remplaçant dans l'équation, on obtient

$$F''(x)G(y) + F(x)G''(y) = 0$$

et il existe donc une constante λ telle que

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = \lambda = -\frac{G''(y)}{G(y)}.$$

Équation de Laplace : solutions à variables séparées

Comme dans le cas des équations des ondes, on distingue alors les trois cas suivants :

- si $\lambda = 0$, alors

$$F(x) = ax + b,\ G(y) = \alpha y + \beta.$$

- si $\lambda > 0$, alors

$$F(x) = ae^{\sqrt{\lambda}x} + be^{-\sqrt{\lambda}x},\ \ G(y) = \alpha\cos(\sqrt{\lambda}y) + \beta\sin(-\sqrt{\lambda}y).$$

- si $\lambda < 0$, alors

$$F(x) = a\cos(\sqrt{-\lambda}x) + b\sin(\sqrt{-\lambda}x),$$

$$G(y) = \alpha e^{\sqrt{-\lambda}y} + \beta e^{-\sqrt{-\lambda}y}.$$

En tenant compte des conditions initiales, on détermine le cas qui se produit et les solutions de l'équation.

Équation de la chaleur

On s'intéresse à l'équation de la chaleur avec une condition initiale

$$(EC1) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - c\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

et l'équation de la chaleur avec une condition au bord

$$(EC2) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - c\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad \forall x > 0, \quad \forall t > 0, \\ u(0,t) = u_0(t), \quad \forall t > 0, \end{cases}$$

Équation de la chaleur

Grâce aux séries de Fourier ...

Théorème 3

Soient $c > 0$ et $u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue 2π-périodique. Alors il existe une unique solution u de $(EC1)$ vérifiant

- pour tout $t > 0$, $u(x, t)$ est 2π-périodique comme fonction en x,
- la dérivée partielle $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (resp. $\dfrac{\partial u}{\partial t}$) existe et est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$,
- $\lim_{t\to 0^+} \sup_{x\in\mathbb{R}} |u(x, t) - u_0(x)| = 0$.

Équation de la chaleur

Théorème 4

Soient $c > 0$ et $u_0 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue 2π-périodique. Alors il existe une unique solution u de $(EC2)$ vérifiant

- pour tout $x > 0$, $u(x, t)$ est 2π-périodique comme fonction en t,
- la dérivée partielle $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (resp. $\dfrac{\partial u}{\partial t}$) existe et est continue sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$,
- $\lim_{x \to 0^+} \sup_{t > 0} |u(x, t) - u_0(x)| = 0$.

Équation des ondes : séries de Fourier

Rappel : équations différentielles ordinaires

On considère l'équation différentielle du second ordre linéaire à coefficients constants avec second membre

$$(E) \qquad ay'' + by' + cy = f$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une application. On lui associé l'équation homogène (sans second membre)

$$(EH) \qquad ay'' + by' + cy = 0.$$

L'ensemble des solutions de l'équation homogène associée (EH) est un espace vectoriel de dimension 2.

Rappel : équations différentielles ordinaires

Pour résoudre l'équation (E), on calcule une solution particulière y_0 de (E) et on résout l'équation homogène associée (EH).

Si y_{EH} est la solution générale de (EH) alors la solution générale de (E) est

$$y_E = y_{EH} + y_0.$$

Rappel : équations différentielles ordinaires

Pour résoudre l'équation homogène (EH) on associé l'équation caractéristique

$$(EC) \qquad ar^2 + br + c = 0.$$

Rappel : équations différentielles ordinaires

• Si $\Delta > 0$ alors (EC) admet deux solutions réelles r_1, r_2. Dans ce cas les fonctions

$$e^{r_1 x}, \; e^{r_2 x}$$

constituent une base de l'espace vectoriel des solutions de (EH) et donc la solution générale de (EH) est

$$y_{EH}(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$$

où $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Rappel : équations différentielles ordinaires

• Si $\Delta = 0$ alors l'équation caractéristique (EC) admet une racine réelle double r. Dans ce cas les fonctions

$$xe^{rx}, \ e^{rx}$$

constituent une base de l'espace vectoriel des solutions de (EH) et donc la solution générale de (EH) est

$$y_{EH}(x) = C_1 e^{rx} x + C_2 e^{rx}$$

où $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Rappel : équations différentielles ordinaires

• Si $\Delta < 0$ alors l'équation caractéristique (EC) admet deux racines complexes conjuguées $\alpha + i\beta$, $\alpha - i\beta$. Dans ce cas les fonctions

$$e^{\alpha x}\cos(\beta x),\ e^{\alpha x}\sin(\beta x)$$

constituent une base de l'espace vectoriel des solutions de (EH) et donc la solution générale de (EH) est

$$y_{EH}(x) = C_1 e^{\alpha x}\cos(\beta x) + C_2 e^{\alpha x}\sin(\beta x)$$

où $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Équation des ondes : séries de Fourier

Exercice

Calculer les solutions 2-périodiques de l'équation des ondes

$$(EO) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & \forall x \in \mathbb{R}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x), & \forall x \in \mathbb{R}, \\ u(x,t) = u(x+2,t), \end{cases}$$

avec

$$u_0(x) = \begin{cases} x & si \quad x \in [0,1[, \\ 2-x & si \quad x \in [1,2], \end{cases}$$

et $u_1(x) = 0$.

On cherche d'abord les développements en série de Fourier des fonctions u_0 et u_1. Comme u_1 est identiquement nulle son développement en série de Fourier est nul.

On calcule donc le développement en série de Fourier de u_0 (en toute rigueur celui de la fonction $\bar{u}_0$ paire définie sur $\mathbb{R}$, 2-périodique et qui coïncide avec u_0 sur $[0, 2]$).

La fonction étant paire on a $b_n = 0$ et donc on calcule a_n. On a $(T = 2 = \frac{2\pi}{\omega})$

$$a_0 = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} u_0(x)\, dx = \int_0^2 u_0(x)\, dx = \int_0^1 x\, dx + \int_1^2 (2 - x)\, dx$$

$$= 1.$$

Pour $n \geq 1$

$$a_n = \int_0^2 u_0(x)\cos(n\pi x)\ dx = \int_0^1 x\cos(n\pi x)\ dx + \int_1^2 (2-x)\cos(n\pi x)\ dx$$

Par une IPP

$$\int_0^1 x\cos(n\pi x)\ dx = \Big[\frac{x\sin(n\pi x)}{n\pi}\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{\sin(n\pi x)}{n\pi}\ dx$$

$$= \frac{1}{n\pi}\Big[\frac{\cos(n\pi x)}{n\pi}\Big]_0^1 = \frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi^2}.$$

Avec le changement de variable $t = 2 - x$

$$\int_1^2 (2-x)\cos(n\pi x)\, dx = \int_0^1 x\cos(n\pi x)\, dx = \frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi^2}.$$

D'où

$$a_n = \frac{2((-1)^n - 1)}{n^2\pi^2}.$$

La série de Fourier de u_0 est

$$\frac{1}{2} + \sum_{n\geq 1} \frac{2((-1)^n - 1)}{n^2\pi^2} \cos(n\pi x).$$

Comme $\bar{u}_0$ est continue et de classe C^1 par morceaux, on a d'après le théorème de Dirichlet, pour tout $x \in [0, 2]$

$$u_0(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n\geq 1} \frac{2((-1)^n - 1)}{n^2\pi^2} \cos(n\pi x)$$

et la convergence est uniforme sur tout intervalle fermé et borné.

Soit $u(x,t)$ une solution de (EO) 2-périodique développable en série de Fourier

$$u(x,t) = \frac{a_0(t)}{2} + \sum_{n\geq 1}(a_n(t)\cos(n\omega x) + b_n(t)\sin(n\omega x)).$$

En dérivant terme à terme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{a_0''(t)}{2} + \sum_{n\geq 1}(a_n''(t)\cos(n\omega x) + b_n''(t)\sin(n\omega x)),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sum_{n\geq 1}(-(n\omega)^2 a_n(t)\cos(n\omega x) - (n\omega)^2 b_n(t)\sin(n\omega x)).$$

Par identification, et en tenant compte des conditions initiales, on obtient

$$a_0''(t) = 0, \;\; a_0(0) = a_{0,0}, \;\; a_0'(0) = a_{1,0}$$

$$a_n''(t) + \lambda_n^2 a_n(t) = 0, \;\; a_n(0) = a_{0,n}, \;\; a_n'(0) = a_{1,n},$$

$$b_n''(t) + \lambda_n^2 b_n(t) = 0, \;\; b_n(0) = b_{0,n}, \;\; b_n'(0) = b_{1,n},$$

où $\lambda_n = cn\omega$.
Comme $\omega = \pi$ et avec ce qui précède, on obtient

(1) $$a_0''(t) = 0, \;\; a_0(0) = 1, \;\; a_0'(0) = 0$$

(2) $$a_n''(t) + (cn\pi)^2 a_n(t) = 0, \;\; a_n(0) = \frac{2((-1)^n - 1)}{n^2\pi^2}, \;\; a_n'(0) = 0$$

(3) $$b_n''(t) + (cn\pi)^2 b_n(t) = 0, \;\; b_n(0) = 0, \;\; b_n'(0) = 0$$

La résolution de l'équation (1) donne

$$a_0(t) = 1.$$

L'équation (2) est une équation linéaire homogène du second ordre et son équation caractéristique est $r^2 + (cn\pi)^2 = 0$ dont les solutions sont $r = \pm icn\pi$. La solution générale est donc

$$a_n(t) = C_1 \cos(cn\pi t) + C_2 \sin(cn\pi t).$$

Les conditions initiales donnent

$$a_n(0) = C_1 = \frac{2((-1)^n - 1)}{n^2\pi^2},\ a'_n(0) = C_2 cn\pi = 0.$$

D'où

$$a_n(t) = \frac{2((-1)^n - 1)}{n^2\pi^2} \cos(cn\pi t).$$

La résolution de (3) donne immédiatement $b_n(t) = 0$.

D'où finalement la solution recherchée est

$$u(x,t) = \frac{1}{2} + \sum_{n\geq 1} \left(\frac{2((-1)^n - 1)}{n^2\pi^2}\right) \cos(cn\pi t)\cos(n\pi x).$$