COURS 10

IV. 3. Séries de Fourier

Définition (Séries de Fourier)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction T-périodique où on pose $T = \frac{2\pi}{\omega}$, intégrable sur tout intervalle fermé et borné. On appelle série de Fourier associée à f, la série trigonométrique

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1}(a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)),$$

où

$$a_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} f(x)\cos(n\omega x)\, dx,$$

$$b_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} f(x)\sin(n\omega x)\, dx.$$

(Appelés coefficients de Fourier).

On peut écrire les coefficients en fonction de la période T

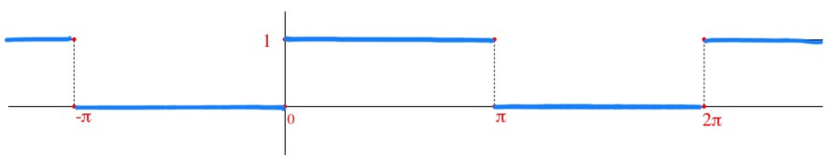
$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^{T} f(x)\cos(n\frac{2\pi}{T}x)\, dx,$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^{T} f(x)\sin(n\frac{2\pi}{T}x)\, dx.$$

Exemple

Considérons la fonction 2π-périodique suivante, appelée la fonction **créneau** :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour } x \in [0,\pi] \\ 0 & \text{pour } x \in]\pi, 2\pi[. \end{cases}$$



Calculons les coefficients de Fourier a_n et b_n de f.

$$a_0 = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\ dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 1\ dx = 1;$$

pour $n \geq 1$,

$$a_n = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\ dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(nx)\ dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi} = 0;$$

$$b_n = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\ dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(nx)\ dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{-\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi}$$
$$= \frac{1-(-1)^n}{\pi n}.$$

D'où la série de Fourier

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(1-(-1)^n)}{\pi n}\sin(nx)$$

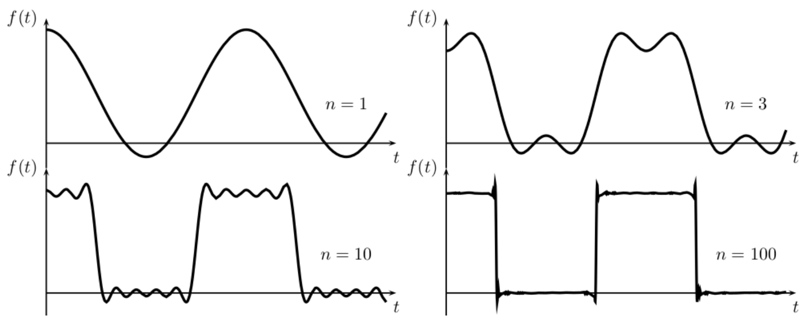
et comme $(1-(-1)^n) = 0$ si n est pair et $(1-(-1)^n) = 2$ si n est impair, on peut écrire la série sous la forme

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{2}{\pi(2k+1)}\sin((2k+1)x).$$

Si on calcule la somme partielle pour des valeurs de n de plus en plus grande

$$S_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\frac{(1-(-1)^k)}{\pi k}\sin(kx)$$

on constate une *convergence* vers la fonction f, comme le montre le dessein suivant :



Donc, d'une façon générale, étant donnée une fonction f et sa série de Fourier, on peut se demander :

- La série de Fourier associée à f est-elle convergente ?
- En cas de convergence, peut-on dire que la série converge vers f ?

Notation

Si la série de Fourier associée à f converge simplement on note sa somme Sf.

$$Sf(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1}(a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)).$$

Remarque

Évidemment, il peut arriver que f soit différente de Sf.

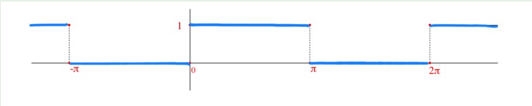
Définition 3

Une fonction f admet une discontinuité de première espèce en un point x_0 si les limites à droite et à gauche en x_0 existent et finies.

Définition 4

Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue par morceaux sur $[a, b]$ s'il existe une subdivision $a_0 = a < a_1 < a_2 < \cdots < a_n = b$ telle que f est continue sur chaque intervalle $[a_i, a_{i+1}]$.

Exemple



Remarque

Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue par morceaux sur $[a, b]$ si et seulement si elle n'a qu'un nombre fini de points de discontinuité sur $[a, b]$ et elles sont toutes de première espèce.

Notation

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$. On note

$$f(x^+) = \lim_{h\to 0} f(x + h); \quad f(x^-) = \lim_{h\to 0} f(x - h).$$

Théorème de Dirichlet ou de Jordan-Dirichlet

Théorème 1 (convergence simple)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction T-périodique continue par morceaux sur tout intevralle fermé et borné $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Supposons que les quantités

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x-h) - f(x^-)}{h}, \quad \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x^+)}{h}$$

existent et finies. Alors la série de Fourier associée à f converge en $x \in \mathbb{R}$ et on a

$$Sf(x) = \frac{1}{2}(f(x^-) + f(x^+)).$$

Définition

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application. On dit que f est de classe C^1 par morceaux s'il existe une subdivision $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ telle que pour tout $i \in \{0, \cdots, n-1\}$, f est de classe C^1 sur $]a_i, a_{i+1}[$ et f et f' possèdent des limites finies à gauche et à droite en a_i et a_{i+1}.

Théorème 2 (convergence normale)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction T-périodique. Supposons que f est de classe C^1 par morceaux sur tout intevralle fermé et borné $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série de Fourier associée à f converge et on a

$$Sf(x) = \frac{1}{2}(f(x^-) + f(x^+)).$$

En particulier, en tout point x où f est continue, la somme de la série de Fourier de f est $f(x)$.
De plus la convergence est normale (et donc uniforme) sur tout intervalle fermé et borné où la fonction f est continue.

Exemple

Reprenons la fonction créneau

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour } x \in [0, \pi] \\ 0 & \text{pour } x \in]\pi, 2\pi[. \end{cases}$$

dont nous avons calculé la série de Fourier

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2}{\pi(2k+1)} \sin((2k+1)x).$$

Donc

$$Sf(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2}{\pi(2k+1)} \sin((2k+1)x).$$

On voit que f est continue par morceaux sur tout intervalle $[a, b]$ (comme f est 2π-periodique, il suffit de le vérifier sur une période $[0, 2\pi]$) et qu'elle est aussi de classe C^1 par morceaux (exercice). Par conséquent, on a pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{m\pi | m \in \mathbb{Z}\}$,

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2}{\pi(2k+1)} \sin((2k+1)x)$$

et pour $x = m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2}{\pi(2k+1)} \sin((2k+1)x).$$

Propriété

Soit $f = \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction T-périodique ($T > 0$). Alors pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a

$$\int_0^T f(x)\,dx = \int_a^{a+T} f(x)\,dx.$$

Preuve

On a

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_a^0 f(x)\,dx + \int_0^T f(x)\,dx + \int_T^{a+T} f(x)\,dx$$

Or en utilisant le changement de variable $t = x - T$, on a

$$\int_T^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^a f(t+T)\,dt = \int_0^a f(x)\,dx, \quad \text{d'où le résultat.}$$

Donc pour le calcul des coefficients de Fourier,

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos(n\frac{2\pi}{T}x)\,dx = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} f(x)\cos(n\frac{2\pi}{T}x)\,dx,$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin(n\frac{2\pi}{T}x)\,dx = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} f(x)\cos(n\frac{2\pi}{T}x)\,dx,$$

et pour les fonctions 2π-périodiques, en prenant $a = -\pi$,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx.$$

Rappel

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction.

- f est paire si et seulement si $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- f est impaire si et seulement si $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Propriété

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction.

- Si f est paire alors
$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$
- Si f est impaire alors
$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$$

Conséquence

- Si f est paire alors
$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx,$$
$$b_n = 0, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$
- Si f est impaire alors
$$a_n = 0, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N},$$
$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx.$$

Exemples

(1) Soit $0 < \alpha < \pi$. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ périodique de période 2π définie par

$$\forall x \in [-\pi, \pi], f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } -\alpha \leq x \leq \alpha; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Calculons les coefficients de Fourier de la fonction f.
Vérifions que f est paire. Si $|x| \leq \alpha$, alors $f(-x) = f(x) = 1$ et si $|x| > \alpha$, alors $f(-x) = f(x) = 0$.
Comme f est paire, $b_n = 0$ et donc on calcule a_0 et a_n.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}(\int_{0}^{\alpha} 1dx) = \frac{2\alpha}{\pi}.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)dx$$
$$= \frac{2}{\pi}(\int_0^{\alpha}\cos(nx)dx) = \frac{2\sin(n\alpha)}{\pi n}.$$

Calculons la somme Sf de la série de Fourier. La fonction f a deux points de discontinuité sur $[-\pi,\pi]$: $-\alpha,\alpha$. Comme f est dérivable par morceau, et comme f est continue sur $[-\pi,\pi]\setminus\{-\alpha,\alpha\}$, d'après le théorème de Dirichlet,

$$f(x) = Sf(x) = \frac{\alpha}{\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2\sin(n\alpha)}{\pi n}\cos(nx), \text{ pour tout } x\in[-\pi,\pi]\setminus\{-\alpha,\alpha\},$$

$$Sf(-\alpha) = \frac{f((-\alpha)^+)+f((-\alpha)^-)}{2} = \frac{1}{2}, \quad Sf(\alpha) = \frac{f(\alpha^+)+f(\alpha^-)}{2} = \frac{1}{2}.$$

(2) On considère la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, 2π-périodique définie par

$$\forall x\in[-\pi,\pi], f(x) = |x|.$$

Calculons les coefficients de Fourier de la fonction f. Comme f est paire, $b_n = 0$ et donc on calcule a_0 et a_n.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}(\int_0^{\pi} xdx) = \pi.$$
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(nx)\,dx = \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ est pair;} \\ \frac{-4}{\pi n^2}, & \text{si } n \text{ est impair.}\end{cases}$$

Calculons la somme Sf de la série de Fourier. Comme f est dérivable par morceau, et comme f est continue sur $\mathbb{R}$, d'après le théorème de Dirichlet,

$$f(x) = Sf(x) = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4}{\pi(2n+1)^2}\cos((2n+1)x), \text{ pour tout } x\in\mathbb{R}.$$

Application. En prenant $x = 0$, on obtient

$$0 = f(0) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$$

et donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application où $a, b \in \mathbb{R}$. On souhaite développer f en séries de Fourier. Pour ce faire, on cherche une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ périodique de période $T \geq b - a$ telle que la restriction de g à $[a, b]$ coïncide avec f.
Si g satisfait les conditions de Dirichlet, on aura

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum (a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x))$$

aux points où g est continue. En particulier, aux points où f est continue

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum (a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)).$$

Propriété

Soit $f : [a, a + 2\pi] \to \mathbb{R}$ une application continue par morceau telle que $f(a) = f(a + 2\pi)$. Alors il existe une unique fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-périodique et continue par morceau qui coïncide avec f sur $[a, a + 2\pi]$.

Preuve

On translate le graphe de f sur les intervalles de la forme $[a + 2k\pi, a + 2(k + 1)\pi]$ qui recouvrent $\mathbb{R}$. On a

$$\mathbb{R} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [a + 2k\pi, a + 2(k + 1)\pi], \text{ et on définit } g \text{ sur } [a + 2k\pi, a + 2(k + 1)\pi]$$

$$\text{par } g(x) = f(x - 2k\pi)$$

On vérifie bien que g est 2π-périodique et coïncide sur $[a, a + 2\pi]$ avec f. □

Exemple 3

Développons en série de Fourier la fonction e^x sur l'intervalle $]0, \pi[$. On définit

$$f(x) = \begin{cases} e^x & si \quad x \in]0, \pi[\\ e^{-x} & si \quad x \in]-\pi, 0]. \end{cases}$$

Alors f vérifie les conditions de la propriété précédente et donc il existe une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-périodique qui coïncide avec f sur $]-\pi, \pi[$.
La fonction g est paire et donc on calcule a_0 et a_n.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x)dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi} (\int_0^{\pi} e^x \, dx) = \frac{2(e^{\pi} - 1)}{\pi}.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cos(nx)dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} e^x \cos(nx) \, dx = 2\frac{(-1)^n e^{\pi} - 1}{1 + n^2}.$$

Donc pour tout $x \in]0, \pi[$, on a

$$e^x = \frac{e^{\pi} - 1}{\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} 2\frac{(-1)^n e^{\pi} - 1}{1 + n^2} \cos(nx).$$

Théorème 1 (Bessel-Parseval)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction T-périodique, où $T = \frac{2\pi}{\omega} > 0$, continue par morceaux. Alors (Inégalité de Bessel)

$$\frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{T}\int_0^T f(x)^2\, dx,$$

En plus, les séries $\sum_{n\geq 0} |c_n|^2$, $\sum_{n\geq 1}(a_n^2 + b_n^2)$ sont convergentes et on a (Égalité de Parseval)

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2 = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)^2\, dx,$$

où a_n, b_n sont les coefficients de la série de Fourier associée à f et c_n est le coefficient en écriture complexe.

Remarque

Donc si f est 2π-périodique, (et continue par morceaux), on a

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2 = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)^2\, dx.$$

Exemple 1 (suite)

Reprenons la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, périodique de période 2π, définie par

$$\forall x \in [-\pi, \pi], f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } -\alpha \leq x \leq \alpha; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

où $0 < \alpha < \pi$. On a $a_0 = \dfrac{2\alpha}{\pi}$, $a_n = \dfrac{2\sin(n\alpha)}{\pi n}$. En appliquant la formule de Parseval on obtient :

$$\frac{\alpha^2}{\pi^2} + \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1}\frac{4\sin^2(n\alpha)}{\pi^2 n^2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = \frac{\alpha}{\pi},$$

d'où

$$\sum_{n\geq 1}\frac{\sin^2(n\alpha)}{n^2} = \frac{\pi^2}{2}\left(\frac{\alpha}{\pi} - \frac{\alpha^2}{\pi^2}\right) = \frac{\alpha\pi - \alpha^2}{2}.$$

Exemple 2 (suite)

Reprenons la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-périodique définie par

$$\forall x \in [-\pi, \pi], f(x) = |x|.$$

On a $a_0 = \pi, \quad a_n = \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ est pair;} \\ \frac{-4}{\pi n^2}, & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$

En appliquant l'égalité de Parseval,

$$\frac{\pi^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{16}{\pi^2(2n+1)^4} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{\pi^2}{3},$$

et donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

Interprétation géométrique et vectorielle

On peut réinterpréter la théorie des séries de Fourier en utilisant les notions d'espace vectoriel et de produit scalaire.

Soit E l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 2π-périodiques et continues par morceaux. Alors E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, muni des opérations usuelles

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \ (\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

On définit

$$\langle f|g \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}\, dx.$$

Alors l'application $(f, g) \mapsto \langle f|g \rangle$ est une forme sesquilinéaire hermitienne positive, mais pas forcément définie positive. Cependant, elle conserve beaucoup de propriétés d'un produit scalaire.
Si

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2\, dx = 0,$$

alors f est nulle sauf en un nombre fini de points. Pour pouvoir parler d'un produit scalaire, on identifié f et g si elles sont identiques sauf en un nombre fini de points sur $[0, 2\pi]$.
Ainsi sur ce nouveau espace, l'application $(f, g) \mapsto \langle f|g \rangle$ devient un produit scalaire.
On peut aussi se restreindre à l'espace des applications continues où $\langle f|g \rangle$ est un produit scalaire.

Définition 1

On appelle semi-norme de la convergence en moyenne quadratique d'une fonction $f \in E$, le nombre réel

$$\|f\|_2 = \sqrt{\langle f|f \rangle}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, considérons l'application

$$e_n : x \mapsto e_n(x) = e^{inx}.$$

Alors $e_n \in E$.

Propriété 1

La famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une famille orthonormée dans E.

Propriété 2

Soit $f \in E$. Le coefficient de Fourier c_n (de l'écriture complexe) de f vérifie

$$c_n = \langle e_n|f \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}\, dx,$$

Remarquons que $c_n e_n$ est la projection orthogonale de f sur e_n.

Propriété 3

Soit $f \in E$. Les coefficients de Fourier a_n, b_n de f vérifient

$$a_n = 2\langle \cos(nx)|f \rangle, \forall n \in \mathbb{N} \text{ et } b_n = 2\langle \sin(nx)|f \rangle, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$