Math 3

TD1 _ L. Dupaigne

12/9/19

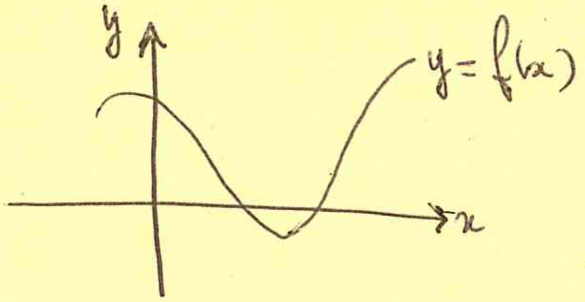
$\boxed{\text{TD1 : corrigé}}$

Ce document contient :

- des rappels de cours
- les corrigés détaillés des exercices

I _ Géométrie

A _ Dans le plan



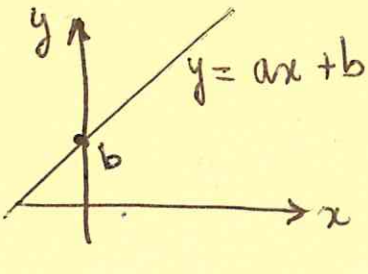
Ceci est le $\boxed{\text{graphe}}$ d'une fonction f.

Les points sur la courbe forment

l'ensemble $\boxed{\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x)\}}$

Exemple 1 : le graphe de la fonction $\boxed{f : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto ax+b \end{cases}}$

où a et b sont des paramètres réels fixés est une $\boxed{\text{droite}}$



Cas particulier : le graphe d'une droite passant par l'origine $\boxed{y = ax}$ est un $\boxed{\text{sous-espace vectoriel}}$ (de dimension 1) $\boxed{\text{de } \mathbb{R}^2}$

Autrement dit, $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y = ax\}$ est un s-ev de $\mathbb{R}^2$

⚠ $\{(x,y) : \mathbb{R}^2 : y = ax+b\}$ où $b \neq 0$ n'est pas un s-ev car le vecteur nul $(0,0)$ ne lui appartient pas

⚠ On peut aussi écrire une droite vectorielle sous la forme

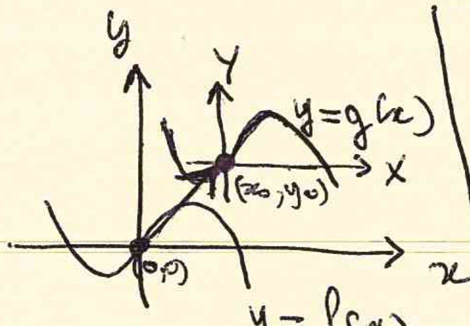
$$\boxed{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : Ax+By=0\}}$$

où A, B sont des constantes réelles (non toutes nulles). On notera que cette écriture est plus générale, car elle contient aussi la droite horizontale d'équation $x = 0$.

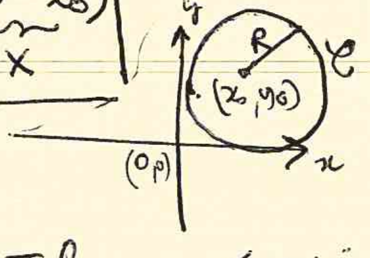
Exemple 2 : $\boxed{\text{translation}}$ d'un graphe

Etant donnée une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et deux réels x_0, y_0, le graphe de la fonction $g : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \boxed{f(x-x_0)+y_0} \end{cases}$

est obtenu par translation du graphe de f par le vecteur (x_0, y_0) :



$$\boxed{\begin{array}{c} y = g(x) \\ \text{ssi} \\ \underbrace{y-y_0}_{Y} = f(\underbrace{x-x_0}_{X}) \end{array}}$$



Exemple 3 : le $\boxed{\text{cercle}}$ n'est pas un graphe. Il a pour équation :

$$\boxed{\mathcal{C} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = R^2\}}$$

⚠ en utilisant les nombres complexes, on a une écriture plus compacte. Si $z = x + iy$ et $z_0 = x_0 + iy_0$

$$\boxed{\mathcal{C} = \{ z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = R \}}$$

où on a identifié un point du plan $\mathbb{R}^2$ de coordonnées (x, y) avec un nombre complexe d'affixe $z = x + iy \in \mathbb{C}$.

On peut aussi s'intéresser à

l'$\boxed{\text{épigraphe}}$ d'une fonction (la partie sous le graphe)

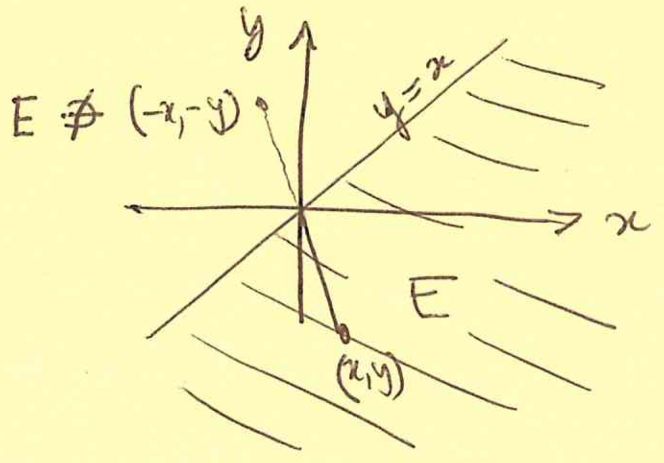
soit l'ensemble $\boxed{\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq f(x) \}}$

et à son $\boxed{\text{hypographe}}$ (la partie au dessus du graphe)

$$\boxed{\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq f(x) \}}$$

<u>Exemple</u> $E = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq x \}$

est l'épigraphe de la droite vectorielle d'équation $y = x$:



E est un $\boxed{\text{demi-plan}}$

ce n'est $\boxed{\text{pas un s-ev de } \mathbb{R}^2}$

car si $(x, y) \in E$,

en général, $(-x, -y) \notin E$.

B. Dans l'espace

On peut généraliser les notions vues précédemment à l'espace $\mathbb{R}^3$. En particulier,

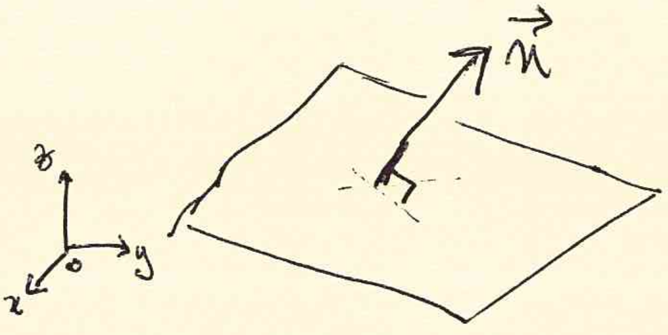
- un $\boxed{\text{plan vectoriel}}$ a pour équation

$$\boxed{\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ Ax + By + Cz = 0 \}}$$

où A, B, C sont des constantes réelles. C'est un $\boxed{\text{s-ev}}$ (de dimension 2) $\boxed{\text{de } \mathbb{R}^3}$. En notant $\vec{n} = (A, B, C)$ et $\vec{X} = (x, y, z)$, on a l'écriture plus compacte

$$\{ \vec{X} \in \mathbb{R}^3 \ : \ \vec{X} \cdot \vec{n} = 0 \}$$

Le plan est formé de tous les vecteurs $\vec{X}$ orthogonaux à $\vec{n}$



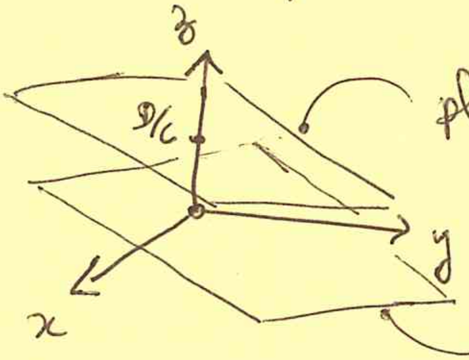
$\vec{n}$ est un vecteur normal au plan.

⚠ $\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ Ax + By + Cz = D \}$ où $D \neq 0$

est un plan mais pas un plan vectoriel : ce n'est pas un s-ev car il ne contient pas l'origine. On l'obtient par translation d'un plan vectoriel : si, disons, $C \neq 0$, alors

$Ax + By + Cz = D$ équivaut à

$$\underbrace{A x}_{X} + \underbrace{B y}_{Y} + C\underbrace{\left(z - \frac{D}{C}\right)}_{Z} = 0$$

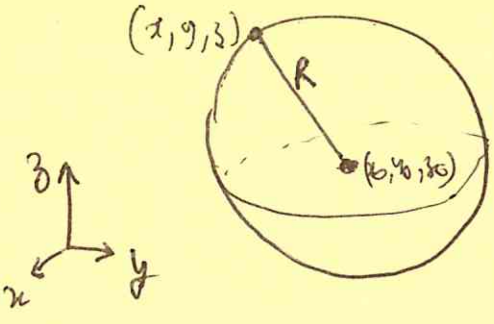


plan ne passant pas par l'origine obtenu par translation d'un plan vectoriel

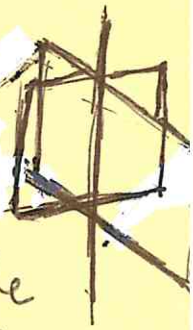
plan vectoriel passant par l'origine

• On a aussi la notion de $\boxed{\text{sphère}}$

$$\boxed{\mathcal{S} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2\}}$$



(qui généralise le cercle)



• Et on a aussi les $\boxed{\text{droites}}$ obtenues par $\boxed{\text{intersection de deux plans}}$. Ainsi une $\boxed{\text{droite vectorielle}}$ s'écrit

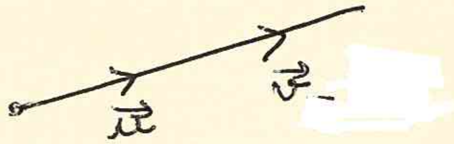
$$\boxed{\left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{c} A_1 x + B_1 y + C_1 z = 0 \\ \text{et} \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z = 0 \end{array} \right\} = \left\{ \vec{X} \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{c} \vec{X} \cdot \vec{n_1} = 0 \\ \text{et} \\ \vec{X} \cdot \vec{n_2} = 0 \end{array} \right\}}$$

Une droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$ est un $\boxed{\text{sev (de dimension 1) de } \mathbb{R}^3}$.

II _ Algèbre linéaire

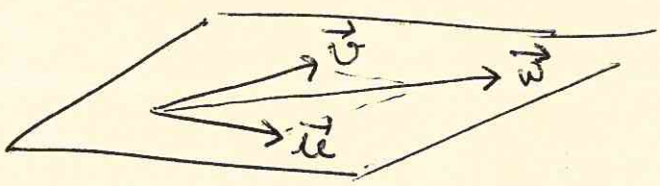
A _ Famille de vecteurs

- deux vecteurs sont linéairement indépendants s'ils n'appartiennent pas à la même droite vectorielle, autrement dit si l'un n'est pas multiple de l'autre :



deux vecteurs linéairement dépendants (ou liés)

- trois vecteurs sont linéairement indépendants s'ils n'appartient pas au même plan vectoriel



trois vecteurs linéairement dépendants (ou liés)

Autrement dit, des vecteurs sont $\boxed{\text{linéairement indépendants}}$ si l'un d'entre eux n'est pas combinaison linéaire des autres. Concrètement, si l'équation

$\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_k u_k = 0$, où les <u>inconnues</u> sont les nombres réels $\underline{\lambda_1, \dots, \lambda_k}$ et

les paramètres sont les vecteurs $u_1, \dots, u_k$,

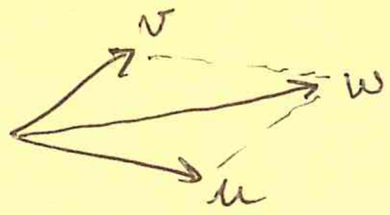
admet pour <u>seule</u> solution $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) = (0, 0, \dots, 0)$,

alors les vecteurs $u_1, \dots, u_k$ forment une **famille libre**
(ils sont lin. indépendants)

⚠ L'équation $\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_k u_k = 0$

admet <u>toujours</u> pour solution $(\lambda_1, \dots, \lambda_k) = (0, \dots, 0)$.
La question est de savoir si c'est <u>la seule possible</u> !

Par exemple, prenons trois vecteurs u, v et $w = u + v$:



$\{u, v, w\}$ <u>n'est pas</u> libre car

$$\lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w = 0$$

admet pour solution $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, 0, 0)$
<u>mais aussi</u> $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (1, 1, -1)$
(et encore plein d'autres).

⚠ Dès que l'on dispose d'une base de l'espace vectoriel (une famille libre et génératrice, voir plus loin), la résolution de l'équation $\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_k u_k = 0$ ~~est~~ ramène à un <u>système linéaire</u> que l'on peut résoudre par la <u>méthode du</u> pivot de Gauß

. Une famille de vecteurs est $\boxed{\text{génératrice d'un e.v. } E}$ si tout vecteur est combinaison linéaire de cette famille. Autrement dit, $\{u_1, \dots, u_k\}$ est génératrice de E si <u>pour tout $f \in E$</u>, l'équation $\boxed{\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_k u_k = f}$ admet <u>au moins</u> une solution. Ici encore, $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ sont l'inconnue et $(u_1, \dots, u_k, f)$ les paramètres.

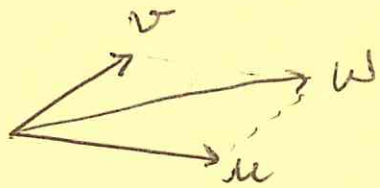
⚠ Le problème avec cette définition, c'est qu'on doit résoudre une équation pour chaque $f \in E$, ce qui peut être long. On dispose d'outils efficaces pour déterminer si une famille est génératrice de E, en raisonnant sur le nombre de ses vecteurs :

(1.) si on connait la dimension de E, disons $n = \dim E \in \mathbb{N}^*$, il <u>faut</u> au moins n vecteurs pour former une famille génératrice de E : autrement dit, un espace de dimension 3 ne peut être engendré par 2 ou 1 vecteurs) (mais il peut l'être par 3, 4 ou plus).

(2.) si la famille $(u_1, \dots, u_n)$ est libre, et si $n = \dim E$, alors $(u_1, \dots, u_n)$ est aussi génératrice

(3.) si la famille $(u_1, \dots, u_k)$ contient plus de vecteurs que la dimension de l'espace $n = \dim E$, on applique la méthode du pivot de Gauß sur les colonnes (quand elle s'applique) pour

Ainsi, dans $E = \mathbb{R}^2$, si u, v, w sont les vecteurs dessinés ci-dessous :



alors

- les vecteurs u, v n'appartiennent pas à une même droite vectorielle. Ils ~~forment~~ donc une famille libre
- en revanche $w = u + v$ est combinaison linéaire de u et v, d'où $\{u, v, w\}$ n'est pas libre. On déduit aussi de l'égalité $w = u + v$ que l'e.v. engendré par $\{u, v, w\}$ est le même que celui engendré par $\{u, v\}$.
- or, $\{u, v\}$ est libre dans $E = \mathbb{R}^2$ de dimension 2, donc $\{u, v\}$ est aussi génératrice de E par (2).
- et donc, $\{u, v, w\}$ est aussi génératrice de $E = \mathbb{R}^2$.

Résumons autrement :

- une famille libre et génératrice est une $\boxed{\text{base}}$
- pour qu'une famille de n vecteurs dans un espace de dimension n soit une base, il suffit qu'elle soit libre ou génératrice.

3 - Applications linéaires

Etant donnée une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, pour tous vecteurs colonnes $(X_1, X_2) \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et tout scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$, les propriétés du produit matriciel permettent d'affirmer que

$$\boxed{A \cdot (\lambda X_1 + X_2) = \lambda A X_1 + A X_2}$$

Autrement dit la multiplication (des matrices) est distributive par rapport à l'addition (des matrices) et compatible avec la multiplication par des scalaires.

On peut reformuler en disant que l'application

$$f_A : \begin{cases} \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ X \longmapsto Y = f_A(X) = AX \end{cases}$$

"faire le produit de la matrice A par le vecteur X"

est $\boxed{\text{linéaire}}$ c'est-à-dire $\boxed{f_A(\lambda X_1 + X_2) = \lambda f_A(X_1) + f_A(X_2)}$

. De manière surprenante, toute application $f : E \to F$ linéaire entre deux espaces de dimension finie peut-être décrite par une matrice A , à condition de s'être fixé une base de chaque espace E et F.

. En tous cas, un moyen pratique pour montrer qu'une application est linéaire consiste à chercher une matrice A telle que

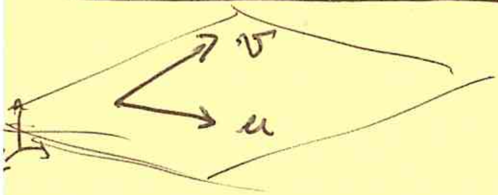
$$f = f_A.$$

Exercice 1

- E_1 est un demi-plan. Ce n'est donc pas un s-ev.
- E_2 est le plan vectoriel de normale $\vec{n} = (1, 2, 1)$. C'est donc un s-ev
- E_3 est une sphère. Ce n'est pas un s-ev (car $\vec{0} \notin E_3$)
- E_4 est le plan vectoriel de normale $\vec{n} = (1, -1, 1)$. C'est donc un s-ev

Exercice 2

1. u et v ne sont pas proportionnels. Ils sont donc linéairement indépendants. Comme $\mathbb{R}^3$ est de dimension 3, ils ne sont pas générateurs de $\mathbb{R}^3$. En particulier, ils ne forment <u>pas une base de $\mathbb{R}^3$</u>. Par contre, ils forment bien une <u>base du plan vectoriel qu'ils engendrent</u> !



2. L'équation $\lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w = 0$ est le système linéaire

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Appliquons la méthode du pivot de Gauß par colonnes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \underset{\substack{C_2 \leftarrow C_2 - 4C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - 7C_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -6 \\ 3 & -6 & -12 \end{pmatrix} \underset{C_3 \leftarrow C_3 + 2C_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 3 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi $\{u, v, w\}$ n'est pas libre, ni génératrice de $\mathbb{R}^3$, car la matrice de ses coef n'est pas inversible.

3. Il y a 4 vecteurs dans un espace de dim 3 : la famille n'est pas libre. Appliquons la méthode de Gauß par colonnes

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 1 \\ 2 & 5 & 8 & 0 \\ 3 & 6 & 9 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ par les calculs précédents

$$\underset{C_4 \leftarrow C_4 - C_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & -2 \\ 3 & -6 & 0 & -3 \end{pmatrix} \underset{C_2 \leftarrow \frac{C_2}{-3}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\underset{C_4 \leftarrow C_4 + 2C_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ Donc, $\operatorname{rg}(u, v, w, z) = 3$ et la famille est génératrice.

Ce n'est pas une base (pas libre).

Exercice 3

1. A résoudre $\lambda \vec{u} + \mu \vec{v} = 0$, ce qui veut dire

pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lambda u(x) + \mu v(x) = 0$

Cela fait une infinité d'équations. Deux devraient suffire pour trouver λ, μ. Prenons

$x = 0$, alors $\boxed{\lambda = 0}$

$x = \frac{\pi}{2\omega}$, alors $\boxed{\mu = 0}$

et donc $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ est libre car $(\lambda, \mu) = (0,0)$ est la seule solution.

2. On sait que la famille $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ est libre dans un espace de dimension 2. C'est donc une base (th de la base incomplète)

3. [Comme $\omega \neq 0$, $w(x) = \cos\left(\omega\left(x + \frac{a}{\omega}\right)\right)$

$$= \cos(\omega X), \quad \text{où } X = x - \left(-\frac{a}{\omega}\right)$$

De même $\cancel{\pi}(x) = \sin(\omega X)$] ← remarque pour plus tard

• On cherche λ, μ tq $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} = \vec{w}$

soit, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lambda \cos(\omega x) + \mu \sin(\omega x) = \cos(\omega x + a)$

On a à nouveau une infinité d'équations à disposition.

Prenons $x = 0$: $\lambda = \cos(a)$

$x = \frac{\pi}{2\omega}$, $\mu = \cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\sin(a)$

Nécessairement, $w(x) = \cos a \cos(\omega x) - \sin a \sin(\omega x)$

Or, puisque w est solution de l'équation différentielle, $w \in F_\omega$. On sait aussi que $\mathcal{B} = \{u, v\}$ est une base de F_ω donc il existe un unique (λ, μ) tq

$$w = \lambda u + \mu v$$

On vient d'identifier λ et μ et donc

$$\cos(a + \omega x) = \cos a \cos(\omega x) - \sin(a) \sin(\omega x)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

On pourrait raisonner de même pour r. Voici une autre approche :

$$r(x) = \sin(\omega x + a) = \Im m\left(e^{i(\omega x + a)}\right)$$

Or, $e^{i(\omega x + a)} = e^{i\omega x} e^{ia}$

$$= (\cos \omega x + i \sin \omega x)(\cos a + i \sin a)$$

$$= Re\left(e^{i(\omega x + a)}\right) + i\left\{\sin(\omega x)\cos a + \cos(\omega x)\sin a\right\}$$

D'où, $r(x) = \sin(\omega x + a)$

$$= (\sin \omega x) \cos a + \cos(\omega x) \sin a$$

$$= \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}, \text{ où } \begin{cases} \lambda = \sin a \\ \mu = \cos a \end{cases}$$

Comme les graphes de w et r ont obtenus par (la même) translation de ceux de u et v, la famille $\{w, r\}$ est libre car $\{u, v\}$ l'est. Comme F_ω est dimension 2, $\{w, r\}$ est aussi une base de F_ω.

4. Réexploitons les nombres complexes :

$$e^{i\omega x} = e^{i(\omega x + a)} e^{-ia}$$

D'où, en prenant partie réelle et imaginaire,

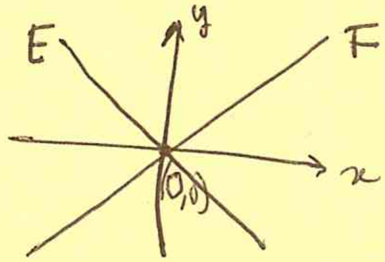
$$\cos \omega x = Re\left((\cos(\omega x + a) + i \sin(\omega x + a))(\cos a - i \sin a)\right)$$

$$\underbrace{\cos(\omega x)}_{\vec{u}} = \underbrace{\cos a}_{\lambda}\ \underbrace{\cos(\omega x + a)}_{\vec{w}} + \underbrace{\sin a}_{\mu}\ \underbrace{\sin(\omega x + a)}_{\vec{z}}$$

De même,

$$\underbrace{\sin(\omega x)}_{\vec{v}} = \underbrace{-\sin a}_{\lambda}\ \underbrace{\cos(\omega x + a)}_{\vec{w}} + \underbrace{\cos a}_{\mu}\ \underbrace{\sin(\omega x + a)}_{\vec{z}}$$

Exercice 4. On reconnait deux droites vectorielles



Il est clair que $E \cap F = \{(0,0)\}$

Donc, E et F sont en somme directe.

Par la formule de Grassman,

$$\dim(E \oplus F) = \dim E + \dim F = 2$$

Or, $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$ et $E \oplus F \subset \mathbb{R}^2$ donc

$$E \oplus F = \mathbb{R}^2.$$

Exercice 5

1. écrivons les vecteurs de $\mathbb{R}^4$ en colonne ; ainsi que ceux de $\mathbb{R}^3$:

$$f(\underbrace{(x,y,z,t)}_{X}) = \begin{pmatrix} x+y+z+t \\ y-t \\ x-2z+3t \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}}_{X}$$

On a $f(X) = AX$. D'où, $f(\lambda X + \mu Y) = A(\lambda X + \mu Y)$

$f(\lambda X+\mu Y) = \lambda AX + \mu AY = \lambda f(X) + \mu f(Y)$,

par les propriétés du produit matriciel, où

λ, μ sont des réels arbitraires et X, Y des vecteurs de $\mathbb{R}^4$ quelconques. On vient de mq f est linéaire

2. $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} A$. Appliquons la méthode du pivot de Gauss (sur les lignes) :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

On résout alors l'équation $AX = 0$ par remontée du système :

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ y - t = 0 \\ -3z + t = 0 \end{cases} \quad \text{ssi} \quad \begin{cases} x = -(t + t/3 + t) = -\frac{7t}{3} \\ y = t \\ z = t/3 \end{cases}$$

D'où, $\boxed{\operatorname{Ker} f} = \left\{ \left(-\frac{7t}{3}, t, \frac{t}{3}, t \right) : t \in \mathbb{R} \right\}$

$= \left\{ t \left(-7/3, 1, 1/3, 1 \right) : t \in \mathbb{R} \right\}$

$= \boxed{\operatorname{Vect}\left(-7/3, 1, 1/3, 1 \right)}$

En particulier, $\dim \operatorname{Ker} f = 1$

3. Par le théorème du rang :

(si $f : E \to F$ est linéaire, alors)

$$\underbrace{\dim E}_{\substack{\text{ici } E=\mathbb{R}^4 \\ \text{donc } \dim E = 4}} = \underbrace{\dim \operatorname{Ker} f}_{\substack{\text{ici} \\ \dim \operatorname{Ker} f = 1}} + \operatorname{rg} f$$

D'où $\boxed{\operatorname{rg} f = \dim E - \dim \operatorname{Ker} f = 4 - 1 = 3}$

Exercice 6

1. Par définition, pour $X \in \mathbb{R}^3$

$$f(X) = AX, \text{ où } A = \begin{pmatrix} 13 & -8 & -12 \\ 12 & -7 & -12 \\ 6 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

On a $F_1 = \operatorname{Ker}(f - Id) = \operatorname{Ker}(A - Id)$.

Or, $A - Id = \begin{pmatrix} 12 & -8 & -12 \\ 12 & -8 & -12 \\ 6 & -4 & -6 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{2}L_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 12 & -8 & -12 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1/4}{\sim} \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

D'où, $u = (x, y, z) \in \operatorname{Ker}(A - Id)$ ssi $3x - 2y - 3z = 0$

Soit encore $x = \frac{2}{3}y + z$, c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}y+z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 2/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{Donc, } F_1 = \mathrm{Vect}\left\{ (2/3, 1, 0), (1, 0, 1) \right\} \text{ et } \dim F_1 = 2}$$

De même,

$$A + Id = \begin{pmatrix} 14 & -8 & -12 \\ 12 & -6 & -12 \\ 6 & -4 & -4 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftrightarrow L_1}{\sim} \begin{pmatrix} 6 & -4 & -4 \\ 12 & -6 & -12 \\ 14 & -8 & -12 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1/2 \\ L_2 \leftarrow L_2/6 \\ L_3 \leftarrow L_3/2}}{\sim} \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 7 & -4 & -6 \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftrightarrow L_1}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -2 \\ 7 & -4 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow 2L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 - 7L_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc $(A + Id)X = 0$ ssi $X = (x, y, z)$ et

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 0 \\ \quad -y + 2z = 0 \end{cases} \text{ ssi } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2z \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc $\boxed{F_2 = \mathrm{Vect}\left\{ (0, 2, 1) \right\} \text{ et } \dim F_2 = 1}$

Exercice 7

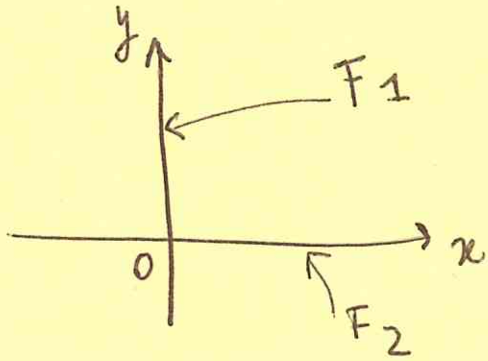
a) F est une droite vectorielle b) F n'est pas un s-ev (ne contient pas l'origine)

c) $xy = 0$ ssi $\{x = 0 \text{ ou } y = 0\}$

Donc F est la réunion de deux droites

$F_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$

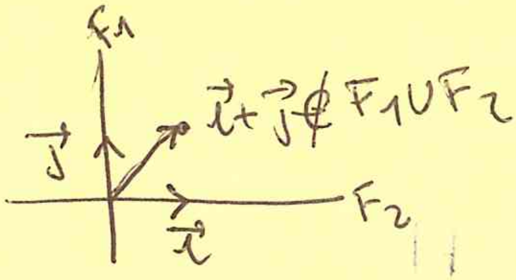
$F_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$



$F = F_1 \cup F_2$ n'est pas un s-ev car, par exemple,

$\vec{\imath} = (1,0) \in F_2$, donc $\vec{\imath} \in F_1 \cup F_2$. De m, $\vec{\jmath} = (0,1) \in F_1$

Mais $\vec{\imath} + \vec{\jmath} = (1,1) \notin F_1 \cup F_2$!



d) F est un plan vectoriel

e) idem que d)

f) F est l'intersection de deux plans vectoriels distincts : c'est donc une droite vectorielle.

Exercice 8

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et f, g deux vecteurs de F. Alors

$$(f+\lambda g)(0) = \underbrace{f(0)}_{=0} + \lambda \underbrace{g(0)}_{=0} = 0$$

et

$$(f+\lambda g)'(0) = \underbrace{f'(0)}_{=0} + \lambda \underbrace{g'(0)}_{=0} = 0$$

Donc, $f+\lambda g \in F$ et F est un s-ev de E
(F est bien non vide car la fonction nulle appartient à F)

2. Les fonctions définies par

$$f(x) = x \qquad \text{pour } x \in \mathbb{R}$$
$$g(x) = 1$$

sont toutes deux dérivables. Elles appartiennent donc à E.

De plus, par définition,

$$H = \mathrm{Vect}(\{f, g\}),$$ qui est donc un s-ev de E.

Notons que si $f \in F \cap H$, alors il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tq

$$\begin{cases} f(0) = f'(0) = 0 \\ f(x) = ax + b \quad \text{pour } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Or, $f(0) = b$, donc $b = 0$ et $f'(0) = a$, donc $a = 0$.

Et donc f est la fonction nulle, soit $F \cap H = \{0\}$.

Il reste à montrer que toute fonction $f \in E$ s'écrit

$$f = g + h,$$

où $g \in F$ et $h \in H$ sont les inconnues.

C'est-à-dire que $f(x) = g(x) + h(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Par définition de h, il existe a et b tels que

$$h(x) = ax + b$$

On cherche donc $g \in F$, $a, b \in \mathbb{R}$ tq

$$(*) \quad f(x) = g(x) + ax + b \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$

En particulier

$$f(0) = \underbrace{g(0)}_{=0} + b, \quad \text{donc } \boxed{b = f(0)}$$

$$f'(0) = \underbrace{g'(0)}_{=0} + a, \quad \text{donc } \boxed{a = f'(0)}$$

Enfin, il nous manque g. Par $(*)$,

$$\boxed{g(x)} = f(x) - (ax+b) = \boxed{f(x) - \left(f'(0)x + f(0)\right)}$$

Remarquons que g ainsi définie appartient bien à F,

car $g(0) = g'(0) = 0$

Ainsi, $\underbrace{f(x)}_{\in E} = \underbrace{\left[f(x) - (f(0) + f'(0)x)\right]}_{\in F} + \underbrace{\left[f(0) + f'(0)x\right]}_{\in H}$

Et donc $\boxed{E = F \oplus H}$

Exercice 9

1. La famille $\{u, v\}$ est libre par hypothèse, et génératrice de $\mathrm{Vect}(\{u,v\})$ par définition. Donc $\dim(\mathrm{Vect}\{u,v\}) = 2$. Or $\dim \mathbb{R}^2 = 2$ et $\mathrm{Vect}(\{u,v\}) \subset \mathbb{R}^2$, donc $\mathrm{Vect}(\{u,v\}) = \mathbb{R}^2$

2. Ainsi les s-ev de $\mathbb{R}^2$ sont :
   - l'origine $E = \{(0,0)\}$
   - les droites vectorielles $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by = 0\}$ où $a, b \in \mathbb{R}$ sont donnés
   - $\mathbb{R}^2$ tout entier.

Exercice 10

1. $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ ne sont pas proportionnels, donc $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ est libre

Appliquons la méthode du pivot de Gauß à w_1, w_2, w_3 :

$$(w_1 | w_2 | w_3) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi $\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \lambda_3 w_3 = 0$ ssi

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases} \quad \text{ssi } \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

Donc, $\{w_1, w_2, w_3\}$ est libre.

2. On applique la méthode du pivot de Gauß par colonnes :

$$(v_1|v_2|v_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \underset{\substack{C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - 2C_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{C_3 \leftarrow C_3 - C_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, $\text{Vect}(v_1, v_2, v_3) = \text{Vect}(u_1, u_2)$

où $\boxed{\begin{array}{l} u_1 = (1, 2, 0, 1) \\ u_2 = (0, -1, 1, 0) \end{array}}$ sont non proportionnels

donc libres donc $\{u_1, u_2\}$ est une base de F

3. De même,

$$(w_1|w_2|w_3|w_4) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -5 & -2 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & -5 \\ 1 & 0 & 2 & -2 \\ \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -2 \\ \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ \end{pmatrix}$$

Et donc,

$$\mathrm{Vect}(w_1, w_2, w_3, w_4) = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3),$$ où

$$\boxed{\begin{aligned} u_1 &= (1, 2, 1, 0) \\ u_2 &= (0, -1, 0, 1) \\ u_3 &= (0, 0, 1, 2) \end{aligned}}$$

Par construction, $\{u_1, u_2, u_3\}$ est libre, donc une base de G.

Exercice 11

a) symétrie par rapport à la droite d'éq. $y = x$, donc linéaire

b) si $a = 0$, c'est une projection sur l'axe des abscisses, donc linéaire. Si $a \neq 0$, l'image du vecteur nul n'est pas le vecteur nul, donc l'application n'est pas linéaire.

c) homothétie de rapport a, donc linéaire

d) translation de vecteur (a, a), n'est pas linéaire si $a \neq 0$ car l'image du vecteur nul n'est pas le vecteur nul. si $a = 0$, c'est l'identité, qui est linéaire

e) application linéaire associée à la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

f) application linéaire associée à la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

g) Les applications linéaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont toutes de la forme $\begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto ax \end{cases}$ où $a \in \mathbb{R}$, ce n'est pas le cas du sinus !

Exercice 12

1. $$f(\vec{u}) = f(x\vec{e_1} + y\vec{e_2} + z\vec{e_3})$$
$$= x f(\vec{e_1}) + y f(\vec{e_2}) + z f(\vec{e_3})$$
$$= x\vec{e_1} - y\vec{e_1} + z\vec{e_3} = (x-y)\vec{e_1} + z\vec{e_3}$$
$$= (x-y, 0, z)$$
$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

2. $$\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Ker}\, A = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{cases} x - y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \right\}$$
$$= \{ (y, y, 0) : y \in \mathbb{R} \} = \mathrm{Vect}\{(1,1,0)\}$$

$\{(1,1,0)\}$ est une base de $\mathrm{Ker}\, f$

$$\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}\{ f(\vec{e_1}), f(\vec{e_2}), f(\vec{e_3}) \}$$
$$= \mathrm{Vect}\{ \vec{e_1}, -\vec{e_1}, \vec{e_3} \}$$
$$= \mathrm{Vect}\{ \vec{e_1}, \vec{e_3} \}$$

$\{\vec{e_1}, \vec{e_3}\}$ est une base de $\mathrm{Im}\, f$

3. Il suffit de le vérifier sur chaque vecteur de la base :

$$\begin{cases} f \circ f(\vec{e_1}) = f(f(\vec{e_1})) = f(\vec{e_1}) \cancel{= \vec{e_1}} \\ f \circ f(\vec{e_2}) = f(f(\vec{e_2})) = f(-\vec{e_1}) = -f(\vec{e_1}) = -\vec{e_1} = f(\vec{e_2}) \\ f \circ f(\vec{e_3}) = f(f(\vec{e_3})) = f(\vec{e_3}) \ldots \end{cases}$$