Exercice 1 Pour que le produit de A par B ait un sens, il faut que le nombre de colonnes de A soit égal au nombre de lignes de B

$A \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R})$ $B \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ $C \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$

$D \in \mathcal{M}_{2}(\mathbb{R})$ et $E \in \mathcal{M}_{3}(\mathbb{R})$

On peut effectuer les produits $A \times C$; $A \times E$; $B \times A$; $C \times B$, $C \times D$; $D \times B$; $E \times C$

$$A \times C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 7 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,2}(\mathbb{R})$$

$$B \times A = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -6 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$$

$$C \times D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 6 & -15 \\ 8 & 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$$

Exercice 2 1. $A + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & -\lambda \\ -2\lambda & \lambda & 0 \\ \lambda & -\lambda & \lambda \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 4 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$AD = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - z \\ -2x + y \\ x - y + z \end{pmatrix}$$

$$A - \lambda C = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ -2 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

- $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$, on développe par rapport à la première ligne : $\det A = 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \times 1 - 1 \times (2-1) = 0$

Rem On peut aussi calculer le déterminant d'une matrice de dimension 3 à l'aide de la règle de Sarrus

- $\det B = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$, on développe par rapport à la dernière colonne :

$\det B = 2 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 2(1-2) = -2$

- $\det(AB) = \begin{vmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 4 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$ (avec la méthode de votre choix)

Prop $\det(AB) = \det(A) . \det(B) = \det(B) . \det(A) = \det(BA)$

Exercice 3 $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}_B$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}_B$

1. Méthode 1 : Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Si $\lambda \vec{u} + \mu \vec{v} = \vec{0}$ alors $\begin{cases} 2\lambda + \mu = 0 \\ \lambda - \mu = 0 \end{cases}$ donc $\lambda = \mu = 0$. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont linéair^t indépdts.

Méthode 2 : $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont linéairement indépendants

2. $C = (\vec{u}, \vec{v})$ est une famille libre de deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ et $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$ donc C est une base de $\mathbb{R}^2$

3. $\vec{w} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_B = x\vec{e_1} + y\vec{e_2}$

or $\begin{cases} \vec{u} = 2\vec{e_1} + \vec{e_2} \\ \vec{v} = \vec{e_1} - \vec{e_2} \end{cases}$ donc $\begin{cases} \vec{e_1} = \frac{1}{3}(\vec{u} + \vec{v}) & (L_1 - L_2) \div 3 \\ \vec{e_2} = \frac{1}{3}(\vec{u} - 2\vec{v}) & (L_1 - 2L_2) \div 3 \end{cases}$

Ainsi $\vec{w} = \frac{1}{3}(\vec{u} + \vec{v})x + \frac{1}{3}(\vec{u} - 2\vec{v})y$

$\vec{w} = \frac{1}{3}(x+y)\vec{u} + \frac{1}{3}(x-2y)\vec{v}$

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y \\ \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y \end{pmatrix}_C \quad \text{donc} \quad \mathcal{M}_C(\vec{w}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y \\ \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y \end{pmatrix}$$

4. Pour écrire la matrice de passage, on écrit les coordonnées de la nouvelle base exprimées dans l'ancienne base

$$\mathcal{B} = (\vec{e_1}, \vec{e_2}) \qquad \mathcal{C} = (\vec{u}, \vec{v}) \qquad \begin{aligned} \vec{u} &= 2\vec{e_1} + \vec{e_2} \\ \vec{v} &= \vec{e_1} - \vec{e_2} \end{aligned}$$

$$P = P_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} u & v \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \end{array} \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{aligned} \vec{e_1} &= \frac{1}{3}(\vec{u} + \vec{v}) \\ \vec{e_2} &= \frac{1}{3}(\vec{u} - 2\vec{v}) \end{aligned}$$

$$P^{-1} = P_{\mathcal{C}\mathcal{B}} = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} e_1 & e_2 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} u \\ v \end{array} \end{array} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

5. $$P \times P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \times \frac{1}{3} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \times \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = I_2$$

$$P^{-1} \times P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = I_2$$

$$P\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} \frac{1}{3}(x+y) \\ \frac{1}{3}(x-2y) \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x+y \\ x-2y \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3x \\ 3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

On retrouve le résultat de cours :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_1}(\vec{u}) = P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2} \cdot \mathcal{M}_{\mathcal{B}_2}(\vec{u})$$

Exercice 4

(a) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$(x,y) \longmapsto (2x+y, 3x-5y)$

Déf : Si E $\mathbb{K}$ev muni d'une base $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$
F $\mathbb{K}$ev muni d'une base $\mathcal{C} = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$
et $f \in \mathcal{L}(E,F)$

alors $$\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(u_1) & \dots & f(u_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \vec{v}_1 \\ \vdots \\ \vec{v}_p \end{array}$$

Ici $f(\vec{e}_1) = (2, 3)$ $\quad f(e_2) = (1, -5)$ (où $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est la b.c. de $\mathbb{R}^2$)

donc $$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} f(e_1) & f(e_2) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \end{array}$$

(b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ $\qquad \mathcal{B}_1$ bc de $\mathbb{R}^2$
$(x,y) \longmapsto (2x-y; x+y; x-y)$ $\qquad \mathcal{B}_2$ bc de $\mathbb{R}^3$

$f(\vec{e}_1) = (2; 1; 1)$ $\qquad f(\vec{e}_2) = (-1; 1; -1)$

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} f(e_1) & f(e_2) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e'_1 \\ e'_2 \\ e'_3 \end{array}$$

Exercice 5

$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$
$(x,y,z) \longmapsto (x+y+z, y-z, x-2z)$

1) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

$$f(\lambda\vec{u} + \vec{v}) = f(\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z')$$
$$= (\lambda(x+y+z) + x'+y'+z', \lambda(y-z) + y'-z', \lambda(x-2z) + x'-2z')$$
$$= \lambda f(\vec{u}) + f(\vec{v})$$

donc $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$

2) $A = Mat_e(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

3) $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 2 = -4$

$\det A \neq 0$ donc A est une matrice inversible.