Corrigé du contrôle continu 2
(Sujet 2)
Mercredi 13 novembre 2019

Questions de cours

① Une famille $\mathcal{B} = (\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n})$ de E (on suppose $\dim E = n$) est une base orthonormée si

- $\|\vec{e_i}\| = 1, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$
- $\vec{e_i} \perp \vec{e_j}$ pour $i \neq j$.

② Oui ! (voir le cours).

③ – A n'est pas diagonalisable dans une base orthonormée de $\mathbb{C}^3$, car elle n'est pas hermitienne : $A \neq {}^t\bar{A}$.

– B est diagonalisable dans une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ car elle est symétrique.

– C n'est pas diagonalisable dans une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ car elle n'est pas symétrique.

Exo1:

① On a :

$$F = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-y-z=0 \}$$
$$= \{ (y+z, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y, z \in \mathbb{R} \}$$
$$= \{ y(1,1,0) + z(1,0,1) \mid y,z \in \mathbb{R} \}$$
$$= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Donc on pose $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{u_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)$.

Alors $\mathcal{B}$ est une famille génératrice de F et comme $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ ne sont pas colinéairs, $\mathcal{B}$ est une base de F.

② Pour construire une base orthonormée de F, on applique le procédé d'orthonormalisation de Grma-Schmidt, à la base $\mathcal{B}$. On pose :

$$\vec{v}_1 = \frac{\vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} u_1.$$

$$\vec{v}_2' = \vec{u}_2 - \langle \vec{u}_2 \mid \vec{v}_1 \rangle \cdot \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_2 = \frac{\vec{v}_2'}{\|\vec{v}_2'\|} = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Donc la base orthonormée de F est $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$.

3 On a

$$P_F(\vec{e_2}) = \langle \vec{e_2} | \vec{v_1} \rangle \cdot \vec{v_1} + \langle \vec{e_2} | \vec{v_2} \rangle \cdot \vec{v_2}$$

et

$$\langle \vec{e_2} | \vec{v_1} \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\langle \vec{e_2} | \vec{v_2} \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}} \right) = \frac{-1}{\sqrt{6}}$$

et donc

$$P_F(\vec{e_2}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{-1}{6} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{-2}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{-1}{3} \end{pmatrix}$$

Exo 2 : $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

① On calcul $P_A(X)$:

$$P_A(X) = \det(A - XI_3) = \begin{vmatrix} -X & 2 & 2 \\ 2 & -X & -2 \\ 2 & -2 & -X \end{vmatrix}$$

$$= -X \begin{vmatrix} -X & -2 \\ -2 & -X \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -X \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -X & -2 \end{vmatrix}$$

$$= -X\left((X^2-4)\right) - 2(-2X+4) + 2(-4+2X)$$

$$= -X\left((X-2)(X+2)\right) + 4(X-2) + 4(X-2))$$

$$= -X\left((X-2)(X+2)\right) + 8(X-2)$$

$$= (X-2)\left(-X(X+2)+8\right) = (X-2)^2(X+4).$$

Donc A admet deux valeurs propres $\lambda_1 = 2$ de multiplicité algébrique 2 et $\lambda_2 = -4$ de multiplicité 1

② Pour $\lambda_1 = 2$: Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Alors

$$\vec{u} \in E_2(A) \Leftrightarrow (A - 2I_3)\vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow x - y - z = 0.$

Donc $E_2(A)$ est l'espace vectoriel F de l'exercice 1.

On avait trouvé que la famille

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

est une base orthonormée de $E_2(A)$.

Pour $\lambda_2 = -4$: Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Alors

$$\vec{u} \in E_{-4}(A) \Leftrightarrow (A + 4I_3)\vec{u} = \vec{0}$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On applique la méthode de Gauss :

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc $\vec{u} \in E_{-4}(A)$ ssi $\begin{cases} x + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$ ssi $\begin{cases} x = -z \\ y = z \end{cases}$.

D'où $(x, y, z) = (-z, z, z) = z(-1, 1, 1)$ et $E_{-4}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

En posant $\vec{v_3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, on obtient une base $\mathcal{B} = (\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3})$ orthonormée de $\mathbb{R}^3$ constituée de vecteurs propres de A.

③ Donc la base est $\mathcal{B} = (\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3})$. Alors P est la matrice de passage de la base canonique $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ à $\mathcal{B}$:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix},$$

$A = P.D.P^{-1}$,

$$P^{-1} = {}^tP = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

(4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$A^n = P \cdot D^n \cdot P^{-1}.$$

<u>On a:</u>

$$D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & (-4)^n \end{pmatrix} = 2^n \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix}.$$

<u>Donc:</u>

$$P \cdot D^n = 2^n \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix}$$

$$= 2^n \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}}(-2)^n \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}(-2)^n \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}(-2)^n \end{pmatrix}$$

$$P \cdot D^n \cdot P^{-1} = 2^n \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}}(-2)^n \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}(-2)^n \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{3}(-2)^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{2^n}{3} \begin{pmatrix} 2+(-2)^n & 1-(-2)^n & 1-(-2)^n \\ 1-(-2)^n & 2-(-2)^n & -1+(-2)^n \\ 1-(-2)^n & -1+(-2)^n & 2+(-2)^n \end{pmatrix}$$

Exo3 : ① $u_n = \frac{(-1)^n}{n\sqrt{\ln(n)}}$; $n \geq 2$.

On a $|u_n| = \frac{1}{n\sqrt{\ln(n)}}$, et $\sum_{n\geq 2} |u_n|$ est une série de Bertrand avec $\alpha = 1$ et $\beta = \frac{1}{2}$; donc pas convergente.

Donc $\sum_{n\geq 2} u_n$ n'est pas absolument convergente, mais elle est convergente par le critère des séries alternées :

- $\lim_{n\to+\infty} |u_n| = 0$ et • $(|u_n|)_n$ est décroissante.

② $u_n = \frac{2^n}{n^3+1}$, $n \geq 0$. On a $\lim_{n\to+\infty} \frac{2^n}{n^3+1} = +\infty$ par le critère des puissances comparées et donc $\sum_{n\geq 0} u_n$ est grossièrement divergente.

③ $u_n = \frac{1}{3^n \ln(1+\frac{1}{n^5})}$; $n \geq 1$.

On a $\ln\left(1+\frac{1}{n^5}\right) \sim_{+\infty} \frac{1}{n^5}$ et donc

$$u_n \sim_{+\infty} \frac{n^5}{3^n}.$$

Comme $\sum_{n\geq 1} u_n$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{n^5}{3^n}$ sont à termes positifs et $u_n \sim_{+\infty} \frac{n^5}{3^n}$, elles sont de même nature. On peut utiliser le critère de D'Alembert :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^5}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n^5} = \frac{1}{3} < 1.$$

Donc $\sum_{n\geq 1} \frac{n^5}{3^n}$ est convergente et donc $\sum_{n\geq 1} u_n$ est (absolument) convergente.