Corrigé du contrôle continu 2
(Sujet 1)
Mercredi 13 novembre 2019

Questions de cours

① Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de A, s'il existe $\vec{u} \in \mathbb{K}^n$, $\vec{u} \neq \vec{0}$, vérifiant

$$A\vec{u} = \lambda \vec{u}.$$

② Soit $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. P est orthogonale si

$$P \cdot {}^tP = {}^tP \cdot P = I_n$$, où ${}^tP$ est la transposée de P.

③ - A n'est pas diagonalisable dans une base orthonormée car A n'est pas symétrique ($A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$)

- B est diagonalisable dans une base orthonormée car B est symétrique ($B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$).

- $C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, C n'est pas diagonalisable dans une base orthonormée car ~~[illegible]~~ C n'est pas hermitienne. En effet :

$$\overline{C} = \begin{pmatrix} 1 & -i & 1-i \\ -i & 2 & 4i \\ 0 & -4i & 9 \end{pmatrix}, \quad {}^t\overline{C} = \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ -i & 2 & -4i \\ 1-i & 4i & 9 \end{pmatrix}$$

$$C \neq {}^t\overline{C}$$

Exo1:

① On a :

$$F = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-y-z=0 \}$$
$$= \{ (y+z, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y, z \in \mathbb{R} \}$$
$$= \{ y(1,1,0) + z(1,0,1) \mid y,z \in \mathbb{R} \}$$
$$= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Donc on pose $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)$.

Alors $\mathcal{B}$ est une famille génératrice de F et comme $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ ne sont pas colinéairs, $\mathcal{B}$ est une base de F.

② Pour construire une base orthonormée de F, on applique le procédé d'orthonormalisation de Grma-Schmidt, à la base $\mathcal{B}$. On pose :

$$\vec{v}_1 = \frac{\vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} u_1 .$$

$$\vec{v}_2' = \vec{u}_2 - \langle \vec{u}_2 \mid \vec{v}_1 \rangle \cdot \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_2 = \frac{\vec{v}_2'}{\|\vec{v}_2'\|} = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Donc la base orthonormée de F est $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$.

③ On a

$$P_F(\vec{e_1}) = \langle \vec{e_1} | \vec{v_1} \rangle \cdot \vec{v_1} + \langle \vec{e_2} | \vec{v_2} \rangle \cdot \vec{v_2} .$$

et

$$\langle \vec{e_1} | \vec{v_1} \rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\langle \vec{e_1} | \vec{v_2} \rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}} \right) = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

et donc

$$P_F(\vec{e_1}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{-1}{6} \\ \frac{2}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} .$$

Exo 2: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

① On calcul $P_A(X)$.

$$P_A(X) = \det(A - XI_3) = \begin{vmatrix} -X & 1 & 1 \\ 1 & -X & -1 \\ 1 & -1 & -X \end{vmatrix}$$

$$= -X \begin{vmatrix} -X & -1 \\ -1 & -X \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -X \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -X & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -X\left((X^2-1)\right) - (-X+1) + \left((-1+X)\right)$$

$$= -X\left((X-1)(X+1)\right) + (X-1) + (X-1)$$

$$= (X-1)\left(-X(X+1)+2\right) = (X-1)^2(X+2).$$

Donc A admet deux valeurs propres $\lambda_1 = 1$ de multiplicité 2 et $\lambda_2 = -2$ de multiplicité 1.

② Pour $\lambda_1 = 1$: Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Alors

$$\vec{u} \in E_1(A) \Leftrightarrow (A - I_3)\vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow \quad x - y - z = 0.$

Donc $E_1(A)$ est l'espace vectoriel F de l'exercice 1.

On avait trouvé que la famille

$$v_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v_2} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

est une base orthonormé de $E_1(A)$

Pour $\lambda_2 = -2$: Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Alors

$$\vec{u} \in E_{-2}(A) \Leftrightarrow (A + 2I_3)\vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

En appliquant la méthode de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{-3}{2} \\ 0 & \frac{-3}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc $\vec{u} \in E_{-2}(A)$ ssi $\begin{cases} x+z=0 \\ y-z=0 \end{cases}$ ssi $\begin{cases} x=-z \\ y=z \end{cases}$.

D'où $(x,y,z) = (-z,z,z) = z(-1,1,1)$ et $E_{-2}(A) = \text{Vect}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

En posant $\vec{v_3} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, on obtient une base $(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3})$ orthonormée de $\mathbb{R}^3$ constituée de vecteurs propres de A (car, en effet, les sous-espaces propres associés aux valeurs propres sont orthogonaux).

③ Donc la base est $\mathcal{B} = (\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3})$, précédente. Alors P est la matrice de passage de la base canonique $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ à $\mathcal{B}$:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = {}^tP = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix},$$

$$A = P.D.P^{-1}, \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

(4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$A^n = P \cdot D^n \cdot P^{-1}.$$

On a

$$P \cdot D^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}}(-2)^n \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}(-2)^n \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}(-2)^n \end{pmatrix}$$

$$P \cdot D^n \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}}(-2)^n \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}(-2)^n \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}(-2)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2}{3} + \frac{1}{3}(-2)^n & \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(-2)^n & \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(-2)^n \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(-2)^n & \frac{2}{3} - \frac{1}{3}(-2)^n & \frac{-1}{3} + \frac{1}{3}(-2)^n \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(-2)^n & \frac{-1}{3} + \frac{1}{3}(-2)^n & \frac{2}{3} + \frac{1}{3}(-2)^n \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 + (-2)^n & 1 - (-2)^n & 1 - (-2)^n \\ 1 - (-2)^n & 2 - (-2)^n & -1 + (-2)^n \\ 1 - (-2)^n & -1 + (-2)^n & 2 + (-2)^n \end{pmatrix}$$

Exo 3:

(1) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2 \ln^3(n)}$, $n \geq 2$.

On a $|u_n| = \dfrac{1}{n^2 \ln^3(n)}$, $n \geq 2$. Donc $\sum_{n\geq 2} |u_n|$ est une série de Bertrand avec $\alpha = 2$ et $\beta = 3$. Donc $\sum_{n\geq 2} |u_n|$ est convergente. Donc $\sum_{n\geq 2} u_n$ est convergente.

Donc $\sum_{n\geq 0} u_n$ est absolument convergente.

(2) $u_n = \dfrac{3^n}{n+1}$, $n \geq 0$. On a $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{3^n}{n+1} = +\infty$,

car par les puissances comparées, les puissances l'emportent sur les polynômes. Donc $\sum_{n\geq 0} u_n$ est grossièrement divergente.

(3) $u_n = \dfrac{1}{2^n \ln(1+\frac{1}{n^2})}$, $n \geq 1$.

On a $\ln(1+\frac{1}{n^2}) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$. Donc

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^2}{2^n}, \quad n \geq 1.$$

Comme $\sum_{n\geq 1} u_n$, $\sum_{n\geq 1} \frac{n^2}{2^n}$ sont à termes positifs et $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^2}{2^n}$ elles sont de même nature.

On utilise le critère de D'Alembert :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n^2} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} < 1.$$

Donc $\sum_{n\geq 1} \frac{n^2}{2^n}$ est convergente et par le critère de comparaison $\sum_{n\geq 1} u_n$ est (absolument) convergente.