Corrigé du CC1 (Sujet 2)

09/10/2019 Maths 3

Questions du cours : voir le cours.

Exo 1 :

(1) On a $f(e_1) = f(1,0,0) = (1,0,1)$
$f(e_2) = f(0,1,0) = (1,-1,4)$
$f(e_3) = f(0,0,1) = (1,1,-2)$

et donc $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$.

(2) Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Alors :

$\vec{u} \in \mathrm{Ker}(f)$ ssi $\begin{cases} x+y+z=0 \\ -y+z=0 \\ x+4y-2z=0 \end{cases}$ ssi $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On utilise la méthode de Gauss :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. D'où $\vec{u} \in \mathrm{Ker}(f)$ ssi $\begin{cases} x+2z=0 \\ y-z=0 \end{cases}$

ssi $\begin{cases} x=-2z \\ y=z \end{cases}$. Donc :

$$\mathrm{Ker}(f) = \{(-2z, z, z) \mid z \in \mathbb{R}\} = \{z(-2,1,1) \mid z \in \mathbb{R}\}$$
$$= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Donc la famille constituée du vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ forme une base de $\mathrm{Ker}(f)$ car elle est libre et génératrice.

D'après le théorème du rang :

$$\text{rang}(f) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\text{Ker}(f)) = 3 - 1 = 2.$$

3. Comme $\dim(\text{Im}(f)) = \text{rg}(f) = 2$ et $\text{Im}(f)$ est engendré par les vecteurs colonnes de A ; les vecteurs colonnes de A ne forment pas une famille libre et donc $\det(A) = 0$.

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(f) = 2.$$

Exo 2 :

1. On calcule $\det(\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3})$:

$$\det(\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}) = \begin{vmatrix} \boxed{1 \quad 0 \quad -1} \\ 1 \quad -1 \quad 0 \\ 1 \quad -1 \quad 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -1 \neq 0.$$

Comme $\det(\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}) \neq 0$, la famille $\mathcal{E}$ est libre. Comme $\mathcal{E}$ est une famille libre de trois vecteurs, c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

2.

$$P_{B\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. On utilise la méthode de Gauss :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right). \text{ Donc } P_{B\mathcal{E}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

On sait que $P_{\mathcal{E}\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}\mathcal{E}}^{-1}$.

④ On a $M_{\mathcal{E}}(v) = P_{\mathcal{E}\mathcal{B}} \cdot M_{\mathcal{B}}(v)$ et donc

$$M_{\mathcal{E}}(v) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

<u>Donc:</u> $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{E}}$.

<u>Exo 3:</u> On utilise la méthode de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & \lambda \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & -2 & 2 & \lambda \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{-7}{3} & \frac{7}{3} & \lambda - \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -1 & \frac{3}{7}(\frac{1}{3}-\lambda) \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -1 & \frac{3}{7}(\frac{1}{3}-\lambda) \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3}\left(1 - \frac{3}{7}(\frac{1}{3}-\lambda)\right) \end{array}\right).$$

La dernière équation du système est $0.z = \frac{2}{3}(1 - \frac{3}{7}(\frac{1}{3}-\lambda))$. Donc si le système a une solution alors $1 - \frac{3}{7}(\frac{1}{3}-\lambda) = 0$; donc si $\lambda = -2$. On continue dans ce cas l'algorithme:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Donc $\begin{cases} x = 0 \\ y - z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 + z \end{cases}$.

<u>Donc:</u> $\mathrm{Sol}(S) = (0,1,0) + \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

<u>Conclusion:</u>
- $\lambda \neq -2 \Rightarrow$ pas de solution.
- $\lambda = -2 \Rightarrow \mathrm{Sol}(S) = (0,1,0) + \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.