Correction détaillée des exercices 4, 5 et 6 de la Fiche 1

Correction de l'exercice 4. On rappelle la

Définition 0.0.1 (espaces vectoriels supplémentaires)
Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et soient E et F des sous-espaces vectoriels de V.

1. *On dit que E et F sont en somme directe si $E \cap F = \{\vec{0_V}\}$.*
   On note alors $F \oplus G$ l'espace vectoriel $F + G$.
2. *On dit que E et F sont supplémentaires dans V (ou que V est la somme directe de E et F) si :*
   (a) $E + F = V$
   (b) E et F sont en somme directe

Remarque 0.0.1
Si E et F sont supplémentaires dans V, tout élément de V s'écrit ***de façon unique*** *comme la somme d'un vecteur de E et d'un vecteur de F.*

• Montrons que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

1. L'élément neutre du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ est $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ appartient à E car $0 = -0$.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soient $\vec{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ des vecteurs de E. Montrons que $\lambda\vec{u} + \vec{v} \in E$. On a

$$\lambda\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 + x_2 \\ \lambda y_1 + y_2 \end{pmatrix}$$

   On veut montrer que $\lambda y_1 + y_2 = -(\lambda x_1 + x_2)$. Comme $y_1 = -x_1$ et $y_2 = -x_2$, on a : $\lambda y_1 = -\lambda x_1$ et $\lambda y_1 + y_2 = -(\lambda x_1 + x_2)$

D'après les points 1 et 2, E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. De même, on montre que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.
On remarque que E et F sont des droites passant par l'origine. On montre de la même façon que précédemment que toute droite passant par l'origine est un espace vectoriel.

• Montrons que $E \oplus F = \mathbb{R}^2$.

1. Montrons que $E \cap F = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$.
   Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E \cap F$ et montrons que $\vec{u} \in E$.
   Comme $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E$, on a : $y = -x$
   Comme $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in F$, on a : $y = x$.
   Donc $-x = x$ donc $x = 0$ et donc $y = 0$. Donc $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0}_{\mathbb{R}^2}$.
   Ceci montre que $E \cap F = \{\vec{0}_{\mathbb{R}^2}\}$.
2. Montrons que $E+F = \mathbb{R}^2$. On a : $E+F$ est inclus dans $\mathbb{R}^2$. Il reste à montrer l'inclusion réciproque, c'est-à-dire montrer que tout vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$ s'écrit comme une somme d'un vecteur de E et d'un vecteur de F.
   Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. On cherche $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \in E$ et $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in F$ tels que : $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire que l'on cherche des réels x_1 et x_2 tels que :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} \tag{1}$$

La méthode que l'on va utiliser est appelée méthode d'analyse-synthèse :
Étape 1 : Analyse.
On suppose qu'il existe des réels x_1 et x_2 vérifiant (1) et on cherche des informations sur eux :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x & = x_1 + x_2 \\ y & = -x_1 + x_2 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = x \\ -x_1 + x_2 = y \end{cases}$$

En résolvant le système en les inconnues x_1 et x_2 à l'aide de la méthode du pivot de Gauss, on trouve :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 & = \frac{a-b}{2} \\ x_2 & = \frac{a+b}{2} \end{cases}$$

Étape 2 : Synthèse.
On vérifie que $x_1 = \frac{a-b}{2}$ et $x_2 = \frac{a+b}{2}$ satisfont bien à (1). Le calcul est laissé aux étudiants.

On a donc exprimé $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ comme une somme d'un vecteur de E et d'un vecteur de F. Donc $E + F = \mathbb{R}^2$.

D'après les points 1 et 2, on a bien : $E \oplus F = \mathbb{R}^2$.

Correction de l'exercice 5.

Question 1. Montrons que u est linéaire.

1. Soient $\vec{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ t_1 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ t_2 \end{pmatrix}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^4$. Montrons que

$$u(\vec{a} + \vec{b}) = u(\vec{a}) + u(\vec{b}) \tag{2}$$

   On calcule séparément les deux côtés de l'égalité (2) et on compare. Les calculs sont laissés aux étudiants.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrons que

$$u(\lambda.\vec{a}) = \lambda.u(\vec{a}) \tag{3}$$

   On calcule séparément les deux côtés de l'égalité (3) et on compare. Les calculs sont laissés aux étudiants.

Question 2. On détermine le noyau de u, noté $Ker(u)$. On rappelle que

$$Ker(u) = \left\{ \vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid u(\vec{a}) = 0_{\mathbb{R}^2} \right\}$$

On explicite ce que signifie appartenir au noyau de u :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in Ker(u) \Leftrightarrow u(x, y, z, t) = (0, 0, 0)$$
$$\Leftrightarrow (x + y + z + t, y - t, x - 2z + 3t) = (0, 0, 0)$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ y - t = 0 \\ x - 2z + 3t = 0 \end{cases}$$

On utilise la méthode du pivot de Gauss pour réduire ce système en les inconnues x, y, z, t et on obtient

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in Ker(u) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z+t & = 0 \\ y-t & = 0 \\ -3z+t = 0 \end{cases}$$

On a quatre inconnues et seulement trois équations : on fait donc passer une inconnue, par exemple t, en paramètre à droite des égalités du système, ce qui donne

$$\begin{aligned} (x,y,z,t) \in Ker(u) &\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z = -t \\ y = t \\ z = \frac{1}{3}t \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{7}{3} \\ y = t \\ z = \frac{1}{3}t \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = t. \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} \\ 1 \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc $\{ \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} \\ 1 \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \}$ engendre $Ker(u)$. De plus, il s'agit d'une famille (à un vecteur) libre puisque $\begin{pmatrix} -\frac{7}{3} \\ 1 \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur non nul donc linéairement indépendant. Donc $\{ \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} \\ 1 \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \}$ est une base de $Ker(u)$ et donc la dimension de $Ker(u)$ est 1.

Question 3. On rappelle que le rang de u est la dimension de l'image de u, c'est-à-dire de l'espace vectoriel

$$Im(u) = \Big\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \exists (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, u(x,y,z,t) = (a,b,c) \Big\}$$

D'après le théorème du rang, on a $\dim(\mathbb{R}^4) = \dim(\mathrm{Ker(u)}) + \mathrm{rg(u)}$. D'où $rg(u) = 4 - 1 = 3$.

Remarquons que cela signifie que l'application u est surjective, c'est-à-dire que son image est $\mathbb{R}^3$ tout entier puisque la dimension de l'image de u est 3.

Correction de l'exercice 6.

On rappelle que pour définir un endomorphisme g d'un espace vectoriel E, c'est-à-dire une application linéaire de E dans E, il suffit de donner les images par g d'une base $(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)$, c'est-à-dire les valeurs des $g(\vec{a}_i)$ pour tout i entre 1 et n. En effet, par définition d'une base, tout vecteur u de E s'écrit **de façon unique** sous la forme

$$u = \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n \tag{4}$$

c'est-à-dire que, étant donné le vecteur u, les λ_i sont les seuls scalaires à vérifier (4). On peut alors calculer l'image de u par linéarité de g :

$$g(u) = \lambda_1 g(a_1) + \ldots + \lambda_n g(a_n)$$

ce qui montre bien que g est totalement déterminée par l'image d'une base de E.

On rappelle que, tout vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$ s'écrit

$$\vec{u} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2} + z\vec{e_3}$$

où $Can = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Question 1. Montrons que F_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

1. $0_{\mathbb{R}^3} \in F_1$ car $f(0,0,0) = (0,0,0)$ par linéarité de f.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soient $\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} t \\ v \\ w \end{pmatrix}$ deux vecteurs de F_1, c'est-à-dire que $f(x,y,z) = (x,y,z)$ et $f(t,v,w) = (t,v,w)$. Montrons que :
$$\lambda . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ v \\ w \end{pmatrix} \in F_1$$
On calcule
$$\lambda.(x,y,z) + (t,v,w) = (\lambda.x + t, \lambda.y + v, \lambda.z + w)$$
On veut donc montrer que :
$$f(\lambda.x + t, \lambda.y + v, \lambda.z + w) = (\lambda.x + t, \lambda.y + v, \lambda.z + w)$$
On a :
$$\begin{aligned} f(\lambda.x + t, \lambda.y + v, \lambda.z + w) &= f(\lambda.x, \lambda.y, \lambda.z) + f(t,v,w) \\ &= \lambda.f(x,y,z) + f(t,v,w) \\ &= \lambda.(x,y,z) + (t,v,w) \\ &= (\lambda.x + t, \lambda.y + v, \lambda.z + w) \end{aligned}$$
où les deux premières égalités proviennent de la linéarité de f et la troisième du fait que (x,y,z) et (t,v,w) sont dans F_1.

D'après les points 1 et 2, F_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. On montre de la même manière que F_2 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Déterminons la dimension de F_1 : on explicite ce que signifie appartenir à F_1 :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in F_1 &\Leftrightarrow f(x,y,z) = (x,y,z) \\ &\Leftrightarrow f(x.\overrightarrow{e_1} + y.\overrightarrow{e_2} + z.\overrightarrow{e_3}) = (x,y,z) \\ &\Leftrightarrow x.f(\overrightarrow{e_1}) + y.f(\overrightarrow{e_2}) + z.f(\overrightarrow{e_3}) = (x,y,z) \text{ par linéarité de} f. \\ &\Leftrightarrow x.(13\,\overrightarrow{e_1} + 12\,\overrightarrow{e_2} + 6\,\overrightarrow{e_3}) + y.(-8\,\overrightarrow{e_1} - 7\,\overrightarrow{e_2} - 4\,\overrightarrow{e_3}) + z.(-12\,\overrightarrow{e_1} - 12\,\overrightarrow{e_2} - 5\,\overrightarrow{e_3}) = (x,y,z) \\ &\Leftrightarrow (13x - 8y - 12z, 12x - 7y - 12z, 6x - 4y - 5z) = (x,y,z) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 13x - 8y - 12z = x \\ 12x - 7y - 12z = y \\ 6x - 4y - 5z = z \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 12x - 8y - 12z = 0 \\ 12x - 8y - 12z = 0 \\ 6x - 4y - 6z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow 3x - 2y - 3z = 0 \end{aligned}$$

On a trois inconnues et seulement une équation donc on fait passer deux inconnues, par exemple y et z, comme paramètres à droite de l'égalité :

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in F_1 &\Leftrightarrow 3x = 2y + 3z \\
&\Leftrightarrow x = \frac{2}{3}y + z \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = y.\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Donc la famille $\{ \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}$ engendre F_1. D'après le théorème de la bse incomplète, on peut en extraire une base. Si les deux vecteurs de cette famille sont linéairement indépendants, alors cette famille est déjà une base, sinon, une base sera formée par l'un quelconque des deux vecteurs. Pour voir si cette famille est libre, on résout :

$$\alpha.\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

On trouve :

$$(5) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha & = 0 \\ \beta & = 0 \end{cases}$$

Donc la famille $\{ \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}$ est libre et est donc une base de F_1 dont la dimension est 2. De la même façon, on trouve que la famille $\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \}$ est une base de F_2 qui est donc de dimension 1.

Question 2. Montrons que F_1 et F_2 sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

1. Montrons que $F_1 \cap F_2 = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$. Soit $u \in F_1 \cap F_2$. Alors $u = -u$ donc $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Donc $F_1 \cap F_2 = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.
2. Montrons que $F_1 + F_2 = \mathbb{R}^3$. On a $F_1 + F_2 \subseteq \mathbb{R}^3$. Donc il suffit de montrer que :

$$\dim(F_1 + F_2) = \dim(\mathbb{R}^3) = 3$$

D'après la formule de Grassmann, on a :

$$\dim(F_1 + F_2) = \dim(F_1) + \dim(F_2) - \dim(F_1 \cap F_2)$$

Or d'après ce qui précède : $\dim(F_1 \cap F_2) = 0$ et :

$$\dim(F_1 + F_2) = 2 + 1 = 3$$

Donc $F_1 + F_2 = \mathbb{R}^3$

D'après les points 1 et 2, F_1 et F_2 sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.