Correction TD 3

Exercice 1.

1. $(S_1) \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 3\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 5\\ 7\end{pmatrix}$; $(S_2) \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 1 & 1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$.
2. Soit $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ est $A = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 3\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$ est l'application linéaire associée à (S_1), on peut aussi définir f en donnant l'image de la base canonique, c'est-à-dire $f(\overrightarrow{e_1}) = \overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2}$, $f(\overrightarrow{e_2}) = \overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2}$ et $f(\overrightarrow{e_3}) = \overrightarrow{e_1} + 3\overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_3}$. Ou encore on peut donner l'image d'un vecteur $f(x, y, z) = (x + y + z, 2x - y + 3z, -z)$
   Soit $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ et $\mathcal{B}' = (\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2})$ les bases canoniques respectives de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$, dont la matrices de g dans ces bases est : $B = \begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 1 & 1 & 4\end{pmatrix}$ est l'application linéaire associée à (S_2), on peut aussi définir g en donnant l'image de la base canonique $g(\overrightarrow{e_1}) = \overrightarrow{f_1} + \overrightarrow{f_2}$, $g(\overrightarrow{f_2}) = -\overrightarrow{f_1} + \overrightarrow{f_2}$ et $g(\overrightarrow{f_3}) = 2\overrightarrow{f_1} + 4\overrightarrow{f_2}$. Ou encore on peut définir f par l'image d'un vecteur quelconque $g(x, y, z) = (x - y + 2z, x + y + 4z)$.
3. $\det(A) = \begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 3\\ 0 & 1 & -1\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix} = -1 + 3 = 2 \neq 0$ donc la matrice A est inversible donc
$$(S_1) \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix}1\\ 5\\ 7\end{pmatrix}$$
   Il y a une unique solution
$$(S_2) \Leftrightarrow \begin{cases}x - y = 1 - 2z\\ x + y = 2 - 4z\end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 - 2z\\ 2 - 4z\end{pmatrix}$$
   La matrice $C = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ est inversible car son déterminant est non nul donc
$$(S_2) \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = C^{-1}\begin{pmatrix}1 - 2z\\ 2 - 4z\end{pmatrix}$$
   Il n'y a pas unicité de la solution, à chaque $z \in \mathbb{R}$ on trouve un unique couple (x, y) tels que (x, y, z) soit solution.

Exercice 2.
$$(S_1) \Leftrightarrow \begin{matrix}L_1\\ L_2\\ L_3\end{matrix}\begin{cases}x + y + z = 1\\ x - y + 3z = 3\\ y - z = 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix}L_1\\ L_2 - L_1\\ L_3\end{matrix}\begin{cases}x + y + z = 1\\ -2y + 2z = 2\\ y - z = 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix}L_1\\ L_2\\ L_3\end{matrix}\begin{cases}x + y + z = 1\\ -y + z = 1\\ y - z = 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix}L_1\\ L_2\\ L_3 + L_2\end{matrix}\begin{cases}x + y + z = 1\\ -y + z = 1\\ 0 = 2\end{cases}$$
Il n'y a pas de solution.
$$(S_2) \Leftrightarrow \begin{matrix}L_1\\ L_2\end{matrix}\begin{cases}x - y + 2z = 1\\ x + y + 4z = 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix}L_1\\ L_2 - L_1\end{matrix}\begin{cases}x - y + 2z = 1\\ 2y + 2z = 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x - y + 2z = 1\\ y = -z + \dfrac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = y - 2z + 1\\ y = -z + \dfrac{1}{2}\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}x = -3z + \dfrac{3}{2}\\ y = -z + \dfrac{1}{2}\end{cases}$$
L'ensemble des solutions est $\left(-3z + \frac{3}{2}, -z + \frac{1}{2}, z\right)$ avec $z \in \mathbb{R}$.
$$(S_3) \Leftrightarrow \begin{matrix}L_1\\ L_2\\ L_3\end{matrix}\begin{cases}x + 2y = 1\\ x - y = 2\\ x + 3y = 3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix}L_1\\ L_2 - L_1\\ L_3 - L_1\end{matrix}\begin{cases}x + 2y = 1\\ -3y = 1\\ y = 2\end{cases}$$
Donc il n'y a pas de solution.

Exercice 3.

$$(S_1) \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}\begin{cases} x+y+z=\lambda+1 \\ \lambda x+y+(\lambda-1)z=\lambda \\ x+\lambda y+z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2-\lambda L_1 \\ L_3-L_1 \end{matrix}\begin{cases} x+y+z=\lambda+1 \\ (1-\lambda)y-z=\lambda-1 \\ (\lambda-1)y+(\lambda-1)z=0 \end{cases}$$

Si $\lambda=1$ le système équivaut à $\begin{cases} x+y+z=1 \\ z=0 \end{cases}$, donc à $x=1-y$ et $z=0$, pour tout $y\in\mathbb{R}$

Si $\lambda\neq 1$ le système équivaut à

$$\begin{cases} x+y+z=\lambda+1 \\ (1-\lambda)y-z=\lambda-1 \\ y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=\lambda+1 \\ (1-\lambda)y-z=\lambda-1 \\ z=-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=\lambda+1 \\ (2-\lambda)y=\lambda-1 \\ z=-y \end{cases}$$

Si $\lambda=2$ le système équivaut à

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ z=-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ z=-y \end{cases}$$

Si $\lambda\neq 2$ (et $\lambda\neq 1$) le système équivaut à

$$\begin{cases} x+y+z=\lambda+1 \\ y=\dfrac{\lambda-1}{\lambda-2} \\ z=-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-y-z+\lambda+1=\lambda+1 \\ y=\dfrac{\lambda-1}{\lambda-2} \\ z=-\dfrac{\lambda-1}{\lambda-2} \end{cases}$$

Dont les solutions sont $x=\lambda+1$, $y=\frac{\lambda-1}{\lambda-2}$ et $z=-\frac{\lambda-1}{\lambda-2}$.

$$(S_2)\ \begin{cases} (2-\lambda)x+2y=0 \\ x+(2-\lambda)y+z=0 \\ 2y+(2-\lambda)z=0 \end{cases}$$

Si $\lambda=2$ alors $(S_2)\ \begin{cases} 2y=0 \\ x+z=0 \\ 2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=-z$ et $y=0$

Si $\lambda\neq 2$ alors

$$(S_2)\ \begin{cases} x=-\dfrac{2}{2-\lambda}y \\ x+(2-\lambda)y+z=0 \\ z=-\dfrac{2}{2-\lambda}y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{2}{2-\lambda}y \\ -\dfrac{2}{2-\lambda}y+(2-\lambda)y-\dfrac{2}{2-\lambda}y=0 \\ z=-\dfrac{2}{2-\lambda}y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{2}{2-\lambda}y \\ \left(-\dfrac{2}{2-\lambda}+(2-\lambda)-\dfrac{2}{2-\lambda}\right)y=0 \\ z=-\dfrac{2}{2-\lambda}y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{2}{2-\lambda}y \\ \dfrac{-2+(2-\lambda)^2-2}{2-\lambda}y=0 \\ z=-\dfrac{2}{2-\lambda}y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{2}{2-\lambda}y \\ \dfrac{(2-\lambda)^2-4}{2-\lambda}y=0 \\ z=-\dfrac{2}{2-\lambda}y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{2}{2-\lambda}y \\ \dfrac{-\lambda(4-\lambda)}{2-\lambda}y=0 \\ z=-\dfrac{2}{2-\lambda}y \end{cases}$$

Si $\lambda=0$

$x=-y$ et $z=-y$ donc les solutions sont $(-y,y,-y)$ avec $y\in\mathbb{R}$

si $\lambda=4$

$x=y$ et $z=y$ donc les solutions sont (y,y,y) avec $y\in\mathbb{R}$

Si $\lambda\neq 0$ et $\lambda\neq 4$ alors $y=0$ et donc $x=z=0$

Exercice 4.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \end{array}\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -4 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{array}{c} L_1 \\ L_2-3L_1 \end{array}\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 17 & -3 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{array}{c} L_1 \\ L_2/17 \end{array}\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3/17 & 1/17 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{c} L_1+4L_2 \\ L_2 \end{array}\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 5/17 & 4/17 \\ 0 & 1 & -3/17 & 1/17 \end{array}\right)$$

Donc $A^{-1} = \begin{pmatrix} 5/17 & 4/17 \\ -3/17 & 1/17 \end{pmatrix} = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \end{array}\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{array}{c} L_1 \\ 2L_2-L_1 \end{array}\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{array}{c} L_1-5L_2 \\ L_2 \end{array}\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 6 & -10 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{array}{c} L_1/2 \\ L_2 \end{array}\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

Donc $B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{array}{c} L_1 \\ L_2-3L_1 \\ L_3+L_1 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -15 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{c} L_1 \\ L_2+15L_3 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 12 & 1 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{array}{c} L_1 \\ L_2/7 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 12/7 & 1/7 & 15/7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{c} L_1+2L_2-5L_3 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -5/7 & 2/7 & -5/7 \\ 0 & 1 & 0 & 12/7 & 1/7 & 15/7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Donc $C^{-1} = \begin{pmatrix} -4/7 & 2/7 & -5/7 \\ 12/7 & 1 & 15/7 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -4 & 2 & -5 \\ 12 & 7 & 15 \\ 7 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 12 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{array}{c} L_1 \\ 4L_2+L_1 \\ L_3+3L_2 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 12 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 9 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 9 & 4 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ 20L_3-9L_2 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 12 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 9 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -9 & 24 & 20 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ -L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 12 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 9 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -24 & -20 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{c} L_1 \\ L_2-9L_3 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 12 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 & -80 & 220 & 180 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -24 & -20 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{array}{c} L_1 \\ L_2/20 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 12 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 11 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -24 & -20 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{c} L_1-12L_2+3L_3 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 76 & -204 & -168 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 11 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -24 & -20 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{c} L_1/4 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 19 & -51 & -42 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 11 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -24 & -20 \end{array}\right)$$

Donc $D^{-1} = \begin{pmatrix} 19 & -51 & -42 \\ -4 & 11 & 9 \\ 9 & -24 & -20 \end{pmatrix}$

Exercice 5.

1ière méthode par substitution

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y=1 \\ 2x+y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y=1 \\ y=3-2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2(3-2x)=1 \\ y=3-2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x=7 \\ y=3-2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=7/5 \\ y=3-2\times 7/5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=7/5 \\ y=1/5 \end{cases}$$

2ième méthode par le pivot de Gauss

$$(S) \Leftrightarrow \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \end{array}\begin{cases} x-2y=1 \\ 2x+y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{c} L_1 \\ L_2-2L_1 \end{array}\begin{cases} x-2y=1 \\ 5y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{c} L_1 \\ L_2-2L_1 \end{array}\begin{cases} x=1+2\times\dfrac{1}{5}=7/5 \\ y=1/5 \end{cases}$$

3ième méthode en inversant la matrice

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ équivaut à $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$

4ième méthode avec la formule de Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{7}{5}; y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{5}$$

Exercice 6.

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\det(A) = 5 \neq 0$ donc A est inversible

$$(S_1) \Leftrightarrow A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $\det(A) = 7 \neq 0$ donc A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$$(S_2) \Leftrightarrow A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4+i \end{pmatrix}$, $\det(A) = 7 + 2i \neq 0$ donc A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{7+2i}\begin{pmatrix} 4+i & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$$(S_3) \Leftrightarrow A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2i \\ 3+i \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 3+2i \\ 3+i \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{7+2i}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3+2i \\ 3+i \end{pmatrix}$$

$$= \frac{7-2i}{53}\begin{pmatrix} 9+7i \\ 3-i \end{pmatrix} = \frac{1}{53}\begin{pmatrix} 77+31i \\ 19-13i \end{pmatrix}$$

Exercice 7.

a.

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 5x + 2y - z = 0 \\ -3x - 4y + 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 - 5L_1 \\ L_3 + 3L_1 \end{matrix}\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 7y - 6z = 0 \\ -7y + 6z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 0 \\ z = \frac{7}{6}y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + \frac{7}{6}y = 0 \\ z = \frac{7}{6}y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{6}y \\ z = \frac{7}{6}y \end{cases}$$

Les solutions sont $\left(-\frac{1}{6}y, y, \frac{7}{6}y\right)$ $y \in \mathbb{R}$

b.

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}\begin{cases} x - y + z = 3 \\ 5x + 2y - z = 5 \\ -3x - 4y + 3z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 - 5L_1 \\ L_3 + 3L_1 \end{matrix}\begin{cases} x - y + z = 3 \\ 7y - 6z = -10 \\ -7y + 6z = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix}\begin{cases} x - y + z = 3 \\ 7y - 6z = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix}\begin{cases} x = 3 + y - z \\ y = \frac{1}{7}(6z - 10) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix}\begin{cases} x = 3 + \frac{6}{7}z - \frac{10}{7} - z = -\frac{1}{7}z + \frac{11}{7} \\ y = \frac{6}{7}z - \frac{10}{7} \end{cases}$$

Les solutions sont $\left(-\frac{1}{7}z - \frac{10}{7}, \frac{6}{7}z - \frac{10}{7}, z\right)$ avec $z \in \mathbb{R}$

c.

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}\begin{cases} 3x + 4y + z + 2t = 3 \\ 6x + 8y + 2z + 5t = 7 \\ 9x + 12y + 3z + 10t = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 - 2L_1 \\ L_3 - 3L_1 \end{matrix}\begin{cases} 3x + 4y + z + 2t = 3 \\ t = 1 \\ 4t = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 4y + z = 1 \\ t = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 - 3x - 4y \\ t = 1 \end{cases}$$

Les solutions sont $(x, y, 1 - 3x - 4y, 1)$ avec $x, y \in \mathbb{R}$

d.

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \\ L_5 \end{array}\begin{cases} 2x+y+z+t=3 \\ x+2y+z+t=1 \\ x+y+2z+t=2 \\ x+y+z+2t=4 \\ x-y+z-t=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l} L_1 \\ 2L_2-L_1 \\ 2L_3-L_1 \\ 2L_4-L_1 \\ 2L_5-L_1 \end{array}\begin{cases} 2x+y+z+t=3 \\ 3y+z+t=-1 \\ y+3z+t=1 \\ y+z+3t=5 \\ -3y+z-3t=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l} L_1 \\ 2L_2-L_1 \\ 3L_3-L_2 \\ 3L_4-L_2 \\ L_5+L_2 \end{array}\begin{cases} 2x+y+z+t=3 \\ 3y+z+t=-1 \\ 8z+2t=4 \\ 2z+8t=16 \\ 2z-2t=-4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \\ L_5-L_4 \end{array}\begin{cases} 2x+y+z+t=3 \\ 3y+z+t=-1 \\ 8z+2t=4 \\ 2z+8t=16 \\ 2z-2t=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \\ z=0 \\ t=2 \end{cases}$$

Bien sûr il est beaucoup plus simple de faire la somme des quatre premières lignes, diviser cela par 5, en déduire x, y, z, t avec les lignes de 1 à 4, puis vérifier que cela marche avec la cinquième.

Exercice 8.

a.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} = -\frac{14}{-5} = \frac{14}{5}$$

b.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-3\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-3\times 8-(-4)}{5} = -4$$

c.

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{-10}{1} = -10$$

d.

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}}$$

Dans chaque déterminant on change L_2 par $L_2 - L_1$ et L_3 par $L_3 - L_1$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{4}{2} = 2$$

Exercice 9.

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} 30 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = B^{-1}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$B\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=B^{-1}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-5\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$$
$$B\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=B^{-1}\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-5\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-19\\8\end{pmatrix}$$
$$C\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=C^{-1}\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}-4&2&-5\\12&7&15\\7&0&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}-20\\21\\21\end{pmatrix}$$
$$C\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=C^{-1}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}-4&2&-5\\12&7&15\\7&0&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}2\\7\\0\end{pmatrix}$$
$$C\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\7\\-4\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=C^{-1}\begin{pmatrix}2\\7\\-4\end{pmatrix}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}-4&2&-5\\12&7&15\\7&0&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\7\\-4\end{pmatrix}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}26\\13\\-14\end{pmatrix}$$
$$D\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=D^{-1}\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}19&-51&-42\\-4&11&9\\9&-24&-20\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}88\\-19\\41\end{pmatrix}$$
$$D\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=D^{-1}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}19&-51&-42\\-4&11&9\\9&-24&-20\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-51\\11\\-24\end{pmatrix}$$
$$D\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\7\\-4\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=D^{-1}\begin{pmatrix}2\\7\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}19&-51&-42\\-4&11&9\\9&-24&-20\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\7\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-151\\33\\-70\end{pmatrix}$$

Exercice 10.

1.

$$A=\begin{pmatrix}a&2&a\\a&a+4&3a\\-a&-2&1\\0&a+2&3a+1\end{pmatrix}$$

La matrice augmentée est

$$\left(\begin{array}{ccc|c}a&2&a&1\\a&a+4&3a&-3\\-a&-2&1&1\\0&a+2&3a+1&b\end{array}\right)$$

On cherche son rang, pour cela on calcule son déterminant

$$\begin{vmatrix}a&2&a&1\\a&a+4&3a&-2\\-a&-2&1&1\\0&a+2&3a+1&b\end{vmatrix}=a\begin{vmatrix}1&2&a&1\\1&a+4&3a&-2\\-1&-2&1&1\\0&a+2&3a+1&b\end{vmatrix}\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\\L_4\end{matrix}$$
$$=a\begin{vmatrix}1&2&a&1\\0&a+2&2a&-3\\0&0&a+1&2\\0&a+2&3a+1&b\end{vmatrix}\begin{matrix}L_1\\L_2-L_1\\L_3+L_1\\L_4\end{matrix}=a\begin{vmatrix}a+2&2a&-3\\0&a+1&2\\a+2&3a+1&b\end{vmatrix}$$
$$=a(a+2)\begin{vmatrix}1&2a&-3\\0&a+1&2\\1&3a+1&b\end{vmatrix}\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\end{matrix}=a(a+2)\begin{vmatrix}1&2a&-3\\0&a+1&2\\0&a+1&b+3\end{vmatrix}\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3-L_1\end{matrix}$$
$$=a(a+2)\begin{vmatrix}a+1&2\\a+1&b+3\end{vmatrix}=a(a+2)(a+1)(b+3-2)=a(a+2)(a+1)(b+1)$$

Si ce déterminant est non nul, c'est-à-dire $a\neq 0$ et $a\neq -2$ et $a\neq -1$ et $b\neq -1$, le rang de la matrice augmentée est 4 or le rang de A est inférieur ou égal à 3 donc le système n'est pas compatible et il n'admet pas de solution.

- Si $a=-1$

$$(S)\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\\L_4\end{matrix}\begin{cases}ax+2y+az=1\\ax+(a+4)y+3az=-2\\-ax-2y+z=1\\(a+2)y+(3a+1)z=b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\\L_4\end{matrix}\begin{cases}-x+2y-z=1\\-x+3y-3z=-2\\x-2y+z=1\\y-2z=b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{matrix}L_1\\L_2-L_1\\L_4\end{matrix}\begin{cases}-x+2y-z=1\\y-2z=-3\\y-2z=b\end{cases}$$

  - Si de plus $b\neq-3$ alors le système n'a pas de solution
  - Si de plus $b=-3$

$$(S)\Leftrightarrow\begin{matrix}L_1\\L_2\end{matrix}\begin{cases}-x+2y-z=1\\y-2z=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{matrix}L_1\\L_2\end{matrix}\begin{cases}x=2y-z-1=2(2z-3)-z-1=3z-7\\y=2z-3\end{cases}$$

  Le système admet une infinité de solutions.

- Si $a=-2$

$$(S)\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\\L_4\end{matrix}\begin{cases}ax+2y+az=1\\ax+(a+4)y+3az=-2\\-ax-2y+z=1\\(a+2)y+(3a+1)z=b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\\L_4\end{matrix}\begin{cases}-2x+2y-2z=1\\-2x+2y-6z=-2\\2x-2y+z=1\\-5z=b\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{matrix}L_1\\L_2-L_1\\L_3+L_2\\L_4\end{matrix}\begin{cases}-2x+2y-2z=1\\-4z=-3\\-z=2\\-5z=b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{matrix}L_1\\L_2-L_1\\L_3+L_2\\L_4\end{matrix}\begin{cases}-2x+2y-2z=1\\z=3/4\\z=-2\\z=-b/5\end{cases}$$

  Donc le système n'a aucune solution

- Si $a=0$

$$(S)\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\\L_4\end{matrix}\begin{cases}2y=1\\4y=-2\\-2y+z=1\\2y+7z=b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\\L_4\end{matrix}\begin{cases}y=1/2\\y=-1/2\\-2y+z=1\\2y+7z=b\end{cases}$$

  Donc le système n'a aucune solution

- Si $b=-1$

$$(S)\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\\L_4\end{matrix}\begin{cases}ax+2y+az=1\\ax+(a+4)y+3az=-2\\-ax-2y+z=1\\(a+2)y+(3a+1)z=b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\\L_4\end{matrix}\begin{cases}ax+2y+az=1\\ax+(a+4)y+3az=-2\\-ax-2y+z=1\\(a+2)y+(3a+1)z=-1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{matrix}L_1\\L_2-L_1\\L_3+L_1\\L_4\end{matrix}\begin{cases}ax+2y+az=1\\(a+2)y+2az=-3\\(a+1)z=2\\(a+2)y+(3a+1)z=-1\end{cases}$$

  On peut supposer que $a\neq0$, que $a\neq-2$ car si $a=0$ ou si $a=-2$ le système n'a pas de solution, on peut aussi supposer que $a\neq-1$ car si $a=-1$, comme ici $b=-1\neq-3$ le système n'a pas de solution.

$$(S)\Leftrightarrow\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\\L_4\end{matrix}\begin{cases}ax+2y+az=1\\(a+2)y+2az=-3\\(a+1)z=2\\(a+2)y+(3a+1)z=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\\L_4\end{matrix}\begin{cases}ax+2y+az=1\\(a+2)y+2az=-3\\z=\dfrac{2}{a+1}\\(a+2)y+(3a+1)z=-1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix} \begin{cases} ax + 2y + \dfrac{2a}{a+1} = 1 \\ (a+2)y + \dfrac{4a}{a+1} = -3 \\ z = \dfrac{2}{a+1} \\ (a+2)y + \dfrac{2(3a+1)}{a+1} = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix} \begin{cases} ax + 2y = 1 - \dfrac{2a}{a+1} = \dfrac{-a+1}{a+1} \\ (a+2)y = -3 - \dfrac{4a}{a+1} = \dfrac{-7a-3}{a+1} \\ z = \dfrac{2}{a+1} \\ (a+2)y = -1 - \dfrac{2(3a+1)}{a+1} = \dfrac{-7a-3}{a+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix} \begin{cases} ax = -2y + \dfrac{-a+1}{a+1} \\ y = \dfrac{-7a-3}{(a+1)(a+2)} \\ z = \dfrac{2}{a+1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix} \begin{cases} x = \dfrac{1}{a}\left(-2\dfrac{-7a-3}{(a+1)(a+2)} + \dfrac{-a+1}{a+1}\right) = \dfrac{-a^2+13a+8}{a(a+1)(a+2)} \\ y = \dfrac{-7a-3}{(a+1)(a+2)} \\ z = \dfrac{2}{a+1} \end{cases}$$

Le système admet une unique solution

Exercice 11. Après calculs

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 3/10 & -2/5 \\ 0 & 1/10 & 1/5 \end{pmatrix}$$

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3/2 & -1/2 \\ 1 & -1/2 & -1/2 \\ -7 & 11/2 & 5/2 \end{pmatrix}$$