Correction détaillée des exercices 13, 15, 18 et 19 de la Fiche 2

Exercice 13. On note $\mathscr{E}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Question 1. Montrons que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Pour cela, d'après le cours, il suffit de montrer que la matrice $M_{\mathscr{E}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est inversible, ou de façon équivalente, que son déterminant est non nul. On a

$$M_{\mathscr{E}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On calcule

$$det(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}) = -1 \neq 0.$$

Donc $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Question 2. D'après la **formule de changement de base pour les matrices associées à des applications linéaires** vue en cours, on a la formule suivante

$$M_{\mathscr{B}}(f) = P_{\mathscr{E},\mathscr{B}}^{-1}.M_{\mathscr{E}}(f).P_{\mathscr{E},\mathscr{B}} \tag{1}$$

On sait que $M_{\mathscr{E}}(f) = A$. On construit la matrice 3×3 $P_{\mathscr{E},\mathscr{B}}$ en mettant en colonne les composantes dans la base canonique $\mathscr{E}$ des vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ de la base $\mathscr{B}$, c'est-à-dire les vecteurs colonnes $M_{\mathscr{E}}(\vec{u}), M_{\mathscr{E}}(\vec{v})$ et $M_{\mathscr{E}}(\vec{w})$. Autrement dit, on a

$$P_{\mathscr{E},\mathscr{B}} = M_{\mathscr{E}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$$

Il reste donc à calculer l'inverse de $P_{\mathscr{E},\mathscr{B}}$. On utilise la méthode vue dans le cours 3 : on échelonne puis on réduit la matrice suivante

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Détaillons

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow_{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow_{L_3 \leftarrow L_3 \times (-1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \longrightarrow_{\substack{L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Donc

$$P_{\mathscr{E},\mathscr{B}}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On utilise la formule (1) pour obtenir

$$M_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Exercice 15.

Question 1. Déterminons une base de Ker(L). On explicite ce que signifie appartenir à cet espace-vectoriel.

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} \in Ker(L) \Leftrightarrow L_{DB}.\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 3\\1 & -1 & 4 & 5\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}x+y+2z+3t & =0\\ x-y+4z+5t & =0\end{cases}$$

Afin de résoudre ce système plus facilement, on échelonne et on réduit la matrice augmentée qui lui est associée, à savoir

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 3 & | & 0\\1 & -1 & 4 & 5 & | & 0\end{pmatrix}$$

Détaillons

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 3 & | & 0\\1 & -1 & 4 & 5 & | & 0\end{pmatrix} \longrightarrow_{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 3 & | & 0\\0 & -2 & 2 & 2 & | & 0\end{pmatrix}$$
$$\longrightarrow_{L_2 \leftarrow L_2 \times (-1/2)} \begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 3 & | & 0\\0 & 1 & -1 & -1 & | & 0\end{pmatrix} \longrightarrow_{L_1 \leftarrow L_1 - L_2} \begin{pmatrix}1 & 0 & 3 & 4 & | & 0\\0 & 1 & -1 & -1 & | & 0\end{pmatrix}$$

On résout alors le système équivalent suivant

$$\begin{cases}x+3z+4t & =0\\ y-z-t & =0\end{cases}$$

On a 4 inconnues et seulement 2 équations : on fait passer z et t en paramètres à droite des égalités du système :

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} \in Ker(L) \Leftrightarrow \begin{cases}x & = -3z-4t\\ y & = z+t\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} = z.\begin{pmatrix}-3\\1\\1\\0\end{pmatrix} + t.\begin{pmatrix}-4\\1\\0\\1\end{pmatrix}$$

Donc la famille $\mathscr{F} = \{\begin{pmatrix}-3\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-4\\1\\0\\1\end{pmatrix}\}$ est génératrice de Ker(L). D'après le théorème de la base incomplète, on peut extraire de $\mathscr{F}$ une base de Ker(L). Celle-ci sera constituée d'un nombre maximal de vecteurs linéairement indépendants parmi les deux vecteurs de $\mathscr{F}$. On cherche donc à trouver le nombre maximal de vecteurs linéairement indépendants parmi les deux vecteurs de $\mathscr{F}$. On regarde tout d'abord si ceux-ci sont linéairement indépendants. On résout

$$\alpha.\begin{pmatrix}-3\\1\\1\\0\end{pmatrix} + \beta.\begin{pmatrix}-4\\1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

On trouve que cela équivaut à $\alpha = \beta = 0$. Donc la famille $\mathscr{F}$ est libre. Comme elle était génératrice, c'est une base de Ker(L). La dimension de Ker(L) est égale à 2.

Déterminons une base de Im(L). Tout d'abord, on utilise la formule du rang pour déterminer la dimension de l'espace vectoriel Im(L), ce qui facilitera la recherche d'une base :

$$dim(\mathbb{R}^4) = dim(Ker(L)) + dim(Im(L))$$

D'où $dim(Im(L)) = 2$

Remarque 0.0.1 1. *Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$. Soit $\mathscr{E} = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit A la matrice de f dans la base $\mathscr{E}$. Notons :*

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$$

On a :

$$A.\vec{e_1} = A.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$A.\vec{e_2} = A.\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \tag{3}$$

$$A.\vec{e_3} = A.\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Donc on voit que les colonnes de la matrice A associée à f ***dans la base canonique*** *sont* ***les composantes, dans la base canonique, des images des vecteurs de cette base****. De plus, si l'on considère un vecteur $\vec{e}$ dont le vecteur des composantes dans la base canonique est : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, c'est-à-dire que :*

$$\vec{e} = x.\vec{e_1} + y.\vec{e_2} + z.\vec{e_3}$$

on a :

$$\begin{aligned} f(\vec{e}) &= A.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} xx_1 + yx_2 + zx_3 \\ xy_1 + yy_2 + zy_3 \\ xz_1 + yz_2 + zz_3 \end{pmatrix} \\ &= x.\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + y.\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} + z.\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} \\ &= x.f(\vec{e_1}) + y.f(\vec{e_2}) + z.f(\vec{e_3}) \end{aligned} \tag{5}$$

Donc on retrouve le fait que par linéarité de f :

$$\begin{aligned} f(\vec{e}) &= f(x.\vec{e_1} + y.\vec{e_2} + z.e_3) \\ &= x.f(\vec{e_1}) + y.f(\vec{e_2}) + z.f(\vec{e_3}) \end{aligned}$$

C'est d'ailleurs précisément parce que le calcul (5), lu en partant du bas jusqu'en haut, est vrai que l'on utilise les matrices pour représenter les applications linéaires et que l'on met en colonne les composantes dans la base considérée (ici la base canonique) des images des vecteurs de cette base. Tout ceci est valable pour les mêmes raisons pour n'importe quel espace vectoriel E de dimension n, et pour n'importe quelle base $\mathscr{B} = (\vec{u_1}, \dots, \vec{u_n})$ de E : ***pour construire la matrice associée à f dans la base $\mathscr{B}$, on met en colonnes les composantes des $f(\vec{u_i})$ dans la base $\mathscr{B}$.***

2. *On a vu que pour tout vecteur $\vec{e}$ dont le vecteur des composantes dans la base canonique est : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ on a :*

$$\begin{aligned} f(\vec{e}) &= f(x.\vec{e_1} + y.\vec{e_2} + z.e_3) \\ &= x.f(\vec{e_1}) + y.f(\vec{e_2}) + z.f(\vec{e_3}) \end{aligned}$$

*Donc on voit que **l'image de f est engendrée en tant qu'espace vectoriel par la famille** $\{f(\vec{e_1}), f(\vec{e_2}), f(\vec{e_3})\}$. Donc selon le point 1, **Im(f) est engendrée par les vecteurs colonnes de la matrice associée à f dans la base canonique**. Ceci est valable pour les mêmes raisons pour n'importe quel espace vectoriel E de dimension n, et pour n'importe quelle base $\mathscr{B} = (\vec{u_1}, \ldots, \vec{u_n})$ de E : **l'image de f est engendrée par les vecteurs colonnes de la matrice associée à f dans la base** $\mathscr{B}$ et **pour déterminer une base de Im(f) il suffira d'extraire un nombre maximal de vecteurs colonnes linéairement indépendants parmi les vecteurs colonnes de cette matrice**.*

D'après la remarque 0.0.1, la famille $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}\}$ des vecteurs colonnes de la matrice L_{DB} engendre $Im(f)$. On a vu que la dimension de $Im(f)$ est égale à 2 donc il suffit d'extraire deux vecteurs linéairement indépendants (on sait que l'on peut trouver 2 vecteurs linéairement indépendants et pas plus de 2 puisque la dimension est 2) de cette famille : par exemple, les deux premiers conviennent et $(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix})$ est une base de $Im(f)$.

Mais on aurait aussi pu choisir les bases $(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix})$ ou $(\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix})$ ou $(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix})$.

Question 2. Trouvons une base de Ker(L).

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in Ker(L) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y &= 0 \\ x - y &= 0 \\ 2x + 4y &= 0 \\ 3x + 5y &= 0 \end{cases}$$

Afin de résoudre ce système plus facilement, on échelonne et on réduit la matrice augmentée qui lui est associée, à savoir :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 0 \\ 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 4 & | & 0 \\ 3 & 5 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Détaillons

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 0 \\ 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 4 & | & 0 \\ 3 & 5 & | & 0 \end{pmatrix} \underset{L_4 \leftarrow L_4 - 3L_1}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \; L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & -2 & | & 0 \\ 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & 2 & | & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow_{L_2 \leftarrow L_2 \times (-1/2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & 2 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow_{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow_{L_1 \leftarrow L_1 - L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

On résout alors le système équivalent suivant

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

ce qui nous donne directement la solution. Donc $Ker(L) = \{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\}$: **il s'agit de l'espace vectoriel réduit à l'élément neutre qui par convention a pour dimension 0 et qui est le seul espace vectoriel qui n'admet pas de base.**

Trouvons une base de Im(L). D'après le théorème du rang, la dimension de Im(L) est 2 donc comme Im(L) est engendrée par la famille $\{\begin{pmatrix}1\\1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\4\\5\end{pmatrix}\}$ cette famille est une base de Im(L) puisqu'elle est génératrice et a deux éléments.

Exercice 18.

Question 1. D'après le cours, il suffit de montrer que la matrice $M_{\mathscr{E}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est inversible, ou de façon équivalente, que son déterminant est non nul. On a

$$M_{\mathscr{E}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\1 & 1 & 0\\0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

On calcule :

$$det(\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\1 & 1 & 0\\0 & 1 & 1\end{pmatrix}) = 2 \neq 0$$

Donc $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Question 2. $P_{\mathscr{E},\mathscr{B}}$ est la matrice dont les colonnes sont les composantes des vecteurs de $\mathscr{B}$ dans la base $\mathscr{E}$. On a donc

$$P_{\mathscr{E},\mathscr{B}} = M_{\mathscr{E}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\1 & 1 & 0\\0 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Question 3. Comme dans la question 2 de l'exercice 13, pour inverser la matrice $P_{\mathscr{E},\mathscr{B}}$, on utilise la méthode vue dans le cours 3 : on échelonne puis on réduit la matrice suivante $\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 0\\1 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0\\0 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

Détaillons

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 0\\1 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0\\0 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \longrightarrow_{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 0\\0 & 1 & -1 & | & -1 & 1 & 0\\0 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow_{L_3 \leftarrow L_3 - L_2} \begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 0\\0 & 1 & -1 & | & -1 & 1 & 0\\0 & 0 & 2 & | & 1 & -1 & 1\end{pmatrix} \longrightarrow_{L_3 \leftarrow L_3 \times (1/2)} \begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 0\\0 & 1 & -1 & | & -1 & 1 & 0\\0 & 0 & 1 & | & 1/2 & -1/2 & 1/2\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow_{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + L_3\\L_1 \leftarrow L_1 - L_3}} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & | & 1/2 & 1/2 & -1/2\\0 & 1 & 0 & | & -1/2 & 1/2 & 1/2\\0 & 0 & 1 & | & 1/2 & -1/2 & 1/2\end{pmatrix}$$

On a donc

$$P^{-1}_{\mathscr{E},\mathscr{B}} = \begin{pmatrix}1/2 & 1/2 & -1/2\\-1/2 & 1/2 & 1/2\\1/2 & -1/2 & 1/2\end{pmatrix}.$$

Question 4. Pour décomposer le vecteur $\vec{t}$ dans la base $\mathscr{B}$ on utilise la formule (**??**) de changement de base pour les vecteurs de composantes du cours :

$$M_{\mathscr{B}}(\vec{t}) = P^{-1}_{\mathscr{E},\mathscr{B}}.M_{\mathscr{E}}(\vec{t})$$

On nous donne : $M_{\mathscr{E}}(\overrightarrow{t}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc en calculant on trouve

$$M_{\mathscr{E}}(\overrightarrow{t}) = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 19.
Question 1. Trouvons une base de Ker(L).

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in Ker(L) &\Leftrightarrow L_B.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z &= 0 \\ 2y &= 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Afin de résoudre ce système plus facilement, on échelonne et on réduit la matrice augmentée qui lui est associée, à savoir

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 2 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Détaillons

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 2 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow_{L_2 \leftarrow L_2 \times (1/2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow_{L_1 \leftarrow L_1 - L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

On résout alors le système équivalent suivant

$$\begin{cases} x - z &= 0 \\ y &= 0 \end{cases}$$

on a 3 inconnues et seulement 2 équations : on fait passer z en paramètre à droite des égalités du système

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in Ker(L) &\Leftrightarrow \begin{cases} x &= z \\ y &= 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc la famille $\mathscr{F} = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ est génératrice de Ker(L). Or le vecteur qui la compose est non nul donc linéairement indépendant. Donc la famille $\mathscr{F}$ est libre. Comme elle était génératrice, c'est une base de Ker(L). La dimension de Ker(L) est égale à 1.

Trouvons une base de Im(L). D'après le théorème du rang, on a : $dim(Im(L)) = 2$.
$Im(L)$ est engendrée par la famille des vecteurs colonnes de la matrice A. D'après le théorème d'existence des bases, on peut en extraire une base qui aura d'après ce que l'on vient de voir 2 vecteurs. On vérifie que les deux premiers vecteurs colonnes par exemple sont linéairement indépendants. Donc $(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix})$ est une base de Im(L).

Question 2. D'après le cours, pour montrer que $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$, il suffit de montrer que la matrice $M_{\mathscr{B}}(\vec{\epsilon_1}, \vec{\epsilon_2}, \vec{\epsilon_3})$ est inversible, ou de façon équivalente, que son déterminant est non nul.
Construisons la matrice $M_{\mathscr{B}}(\vec{\epsilon_1}, \vec{\epsilon_2}, \vec{\epsilon_3})$: on met en colonnes les composantes respectives des vecteurs $\vec{\epsilon_1}, \vec{\epsilon_2}$ et $\vec{\epsilon_3}$ dans la base $\mathscr{B}$, c'est-à-dire les vecteurs colonnes $M_{\mathscr{B}}(\epsilon_i)$. Trouvons ces vecteurs de composantes :
Comme $\vec{\epsilon_1}=\vec{e_1}+\vec{e_3}$, ses composantes dans la base $\mathscr{B}$ sont : $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$. De même, on a : $M_{\mathscr{B}}(\vec{\epsilon_2}) = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ et $M_{\mathscr{B}}(\vec{\epsilon_3}) = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$. D'où :

$$M_{\mathscr{B}}(\vec{\epsilon_1}, \vec{\epsilon_2}, \vec{\epsilon_3}) = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\0 & 0 & 1\\1 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

On calcule

$$det(\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\0 & 0 & 1\\1 & -1 & 0\end{pmatrix}) = 2 \neq 0$$

Donc $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

On a

$$P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\0 & 0 & 1\\1 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

Comme dans la question 2 de l'exercice 13 et la question 3 de l'exercice 18, pour inverser la matrice $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$, on utilise la méthode vue dans le cours 3 : on échelonne puis on réduit la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & | & 0 & 1 & 0\\1 & -1 & 0 & | & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Détaillons :

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & | & 0 & 1 & 0\\1 & -1 & 0 & | & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \longrightarrow_{L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & | & 0 & 1 & 0\\0 & -2 & -1 & | & -1 & 0 & 1\end{pmatrix} \longrightarrow_{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0\\0 & -2 & -1 & | & -1 & 0 & 1\\0 & 0 & 1 & | & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow_{L_2 \leftarrow L_2 \times (-1/2)} \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0\\0 & 1 & 1/2 & | & 1/2 & 0 & -1/2\\0 & 0 & 1 & | & 0 & 1 & 0\end{pmatrix} \longrightarrow_{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 1/2 L_3\\ L_1 \leftarrow L_1 - L_3}} \begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & | & 1 & -1 & 0\\0 & 1 & 0 & | & 1/2 & -1/2 & -1/2\\0 & 0 & 1 & | & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow_{L_1 \leftarrow L_1 - L_2} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & | & 1/2 & -1/2 & 1/2\\0 & 1 & 0 & | & 1/2 & -1/2 & -1/2\\0 & 0 & 1 & | & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

D'où

$$P^{-1}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix}1/2 & -1/2 & 1/2\\1/2 & -1/2 & -1/2\\0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

Question 3. Pour calculer la matrice de L dans la base $\mathscr{B}'$, notée D, on pourrait utiliser comme dans l'exercice 13, la formule (1) de changement de base pour les matrices associées à des applications linéaires :

$$M_{\mathscr{B}'}(L) = P^{-1}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}.M_{\mathscr{B}}(L).P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$$

c'est-à-dire, avec les notations de l'énoncé

$$D = P^{-1}.A.P$$

ce qui nous donnerait directement D puisque l'on a déjà calculé P et P^{-1}. Mais on nous demande de faire autrement dans la question 3. Ce que nous venons de faire répond à la question 4. La façon dont on nous demande de calculer D dans la question 3 est celle qui consiste à revenir à la définition de la construction d'une matrice associée à une application linéaire dans une certaine base que l'on a rappelée dans la remarque 0.0.1 : **il s'agit de mettre en colonnes les composantes dans la base $\mathscr{B}'$ des images par L des vecteurs de la base $\mathscr{B}'$.**

Nous ne disposons que de la matrice correspondant à L dans la base $\mathscr{B}$. Tout d'abord, on exprime $\overrightarrow{\epsilon_2}$ dans la base $\mathscr{B}$: on l'a déjà fait dans la question 2 : $M_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{\epsilon_2}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Ensuite, on multiplie la matrice A par ce vecteur colonne et on obtient le vecteur des composantes de $L(\overrightarrow{\epsilon_2})$ **dans la base $\mathscr{B}$** :

$$M_{\mathscr{B}}(L(\overrightarrow{\epsilon_2})) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Il ne reste plus qu'à utiliser la formule de changement de base pour les vecteurs de composantes pour avoir le vecteur des composantes de $L(\overrightarrow{\epsilon_2})$ **dans la base $\mathscr{B}'$** :

$$M_{\mathscr{B}'}(L(\overrightarrow{\epsilon_2})) = P^{-1}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}.M_{\mathscr{B}}(L(\overrightarrow{\epsilon_2}))$$

En calculant, on trouve

$$M_{\mathscr{B}'}(L(\overrightarrow{\epsilon_2})) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On fait pareil pour calculer $M_{\mathscr{B}'}(L(\overrightarrow{\epsilon_1}))$ et $M_{\mathscr{B}'}(L(\overrightarrow{\epsilon_3}))$ et on trouve :

$$M_{\mathscr{B}'}(L(\overrightarrow{\epsilon_1})) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et

$$M_{\mathscr{B}'}(L(\overrightarrow{\epsilon_1})) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Comme expliqué dans la remarque 0.0.1, on construit $D = L_{\mathscr{B}'}$ en mettant les $M_{\mathscr{B}'}(L(\overrightarrow{\epsilon_i}))$ en colonnes, d'où

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

On a déjà traité la **question 4**, qui était en fait une autre façon d'obtenir D

$$D = P^{-1}.A.P$$

Question 5. On veut calculer A^n. On remarque que lorsque l'on a des matrices diagonales, comme la matrice D, le résultat de D^n est obtenue en élevant les éléments de la diagonale à la puissance n. Donc ici, pour tout entier n, on a :

$$D^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

D'après la question 4, on a $D = P^{-1}.A.P$, donc

$$A = P.D.P^{-1}$$

Voici ce qu'il se passe :

$$A^2 = A.A = P.D.P^{-1}.P.D.P^{-1}$$

Or $P^{-1}.P = I_3$ d'où :

$$A^2 = P.D^2.P^{-1}$$

et de même :

$$\begin{aligned}
A^n &= P.D^n.P^{-1} \\
&= P.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.P^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^n - 2^{n-1} & -2n-1 \\ 0 & 2^n & 0 \\ -2^{n-1} & 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$