CONTRÔLE CONTINU FINAL

Mercredi 08 janvier 2020

Durée : 2 heures

Les documents, les calculatrices et les téléphones portables ne sont pas autorisés. Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque. Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées. La clarté de la rédaction constituera un élément important dans l'appréciation des copies. Le barème est à titre indicatif.

Exercice 1. (7 pts) On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire canonique. Soit $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$f(x, y, z) = (2x + y, x + 2y, z).$$

1. Montrer que la matrice A de f dans la base canonique $\mathcal{C}$ est (1pt)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Justifier pourquoi A est diagonalisable dans une base orthonormée. (1pt)
3. Calculer les valeurs propres de A. (2pts)
4. Déterminer une base orthonormée de chaque sous-espace propre de A. (2pts)
5. Expliciter une base orthonormée $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$, formée de vecteurs propres de f, par rapport à laquelle la matrice de f est une matrice diagonale D, ainsi qu'une matrice orthogonale P telle que $A = PDP^{-1}$. (1pt)

Exercice 2. (6 pts) On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad xy'' + y' + 2y = 0$$

avec la condition initiale

$$(CE) \qquad y(0) = 1, \ \ y'(0) = -2.$$

On suppose que (E) admet une solution développable en série entière au voisinage de 0, $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, de rayon de convergence $R > 0$ et vérifiant la condition initiale (CE).

1. Calculer a_0 et a_1 à l'aide de (CE). (1 pt)

2. Montrer que a_n vérifie la relation de récurrence

$$a_{n+1} = \frac{-2}{(n+1)^2} a_n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

(3 pts)

3. Montrer par récurrence que a_n est donnée par

$$a_n = \frac{(-1)^n 2^n}{n!^2} \text{ pour tout } n \geq 0.$$

(1 pt)

4. Caculer le rayon de convergence de la série entière ainsi obtenue. (1 pt)

Exercice 3. (9 pts) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie par

$$f(x) = \begin{cases} -x - \pi & \text{pour } x \in [-\pi, 0[\\ -x + \pi & \text{pour } x \in]0, \pi] \\ 0 & \text{pour } x = 0. \end{cases}$$

1. Dessiner le graphe de f sur $[-\mathbf{2}\pi, \mathbf{2}\pi]$. (1pt)
2. Montrer que f est impaire. (1pt)
3. Montrer que le coefficient b_n de la série de Fourier de f est donné par :

$$b_n = \frac{2}{n} \text{ pour tout } n \geq 1.$$

(2 pts)

4. Écrire la série de Fourier de f dont la somme sera notée Sf. (0.5 pt)
5. Pour quelles valeurs de x a-t-on $Sf(x) = f(x)$? (1,5 pts)
6. Calculer la somme

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1}.$$

(1,5 pts)

[*Indication : utiliser le théorème de Dirichlet pour une valeur de x bien choisie entre* 0 *et* π.]

7. En utilisant l'identité de Parseval, où a_n et b_n sont les coefficients de Fourier de la fonction f,

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 \, dx$$

calculer la somme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

(1.5 pts)