CORRIGÉ DU CONTRÔLE CONTINU FINAL

(Mercredi 08 janvier 2020)

(Durée : 2 heures)

Les documents, les calculatrices et les téléphones portables ne sont pas autorisés. Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque. Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées. La clarté de la rédaction constituera un élément important dans l'appréciation des copies. Le barème est à titre indicatif.

Exercice 1. (7 pts) On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire canonique. Soit $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$f(x,y,z) = (2x+y, x+2y, z).$$

1. Montrer que la matrice A de f dans la base canonique $\mathcal{C}$ est (1pt)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a

$$f(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f(\vec{e}_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et par conséquent

$$A = M_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Justifier pourquoi A est diagonalisable dans une base orthonormée. (1pt)

On voit que A est une matrice symétrique. D'après le théorème spectral une matrice réelle A est diagonalisable dans une base orthonormée si et seulement si elle est symétrique. Donc A est diagonalisable dans une base orthonormée.

3. Calculer les valeurs propres de A. (2pts)

En développant selon la dernière colonne, on a

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} 2-X & 1 & 0 \\ 1 & 2-X & 0 \\ 0 & 0 & 1-X \end{vmatrix} = (1-X)\begin{vmatrix} 2-X & 1 \\ 1 & 2-X \end{vmatrix} = (1-X)[(2-X)^2-1]$$

et donc $P_A(X) = 0$ si et seulement si $X = 1$ ou $(2-X)^2 - 1 = 0$. Comme $(2-X)^2 - 1 = 0$ si et seulement si $(2-X) = \pm 1$ si et seulement si $X = 1$ ou $X = 3$, on déduit que $(2-X)^2 - 1 = (X-1)(X-3)$. On a donc $P_A(X) = -(X-1)^2(X-3)$. Donc les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 1$ de multiplicité algébrique 2 et $\lambda_2 = 3$ de multiplicité algébrique 1.

4. Déterminer une base orthonormée de chaque sous-espace propre de A. (2pts)

Pour $\lambda_1 = 1$. Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. On a

$$\vec{u} \in E_1(A) \Leftrightarrow (A - Id)\vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x + y = 0.$$

D'où

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ -x \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et donc la famille $\mathcal{B}_0$ des deux vecteurs

$$\vec{a}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

constitue une famille génératrice de $E_1(A)$. Comme $\vec{a}_0$ et $\vec{b}_0$ ne sont pas colinéaires, $\mathcal{B}_0$ est libre et est donc une base de $E_1(A)$.

Pour trouver une base orthonormée, on peut utiliser le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. Mais on remarque ici que $\langle \vec{a}_0 | \vec{b}_0 \rangle = 0$ et donc $\vec{a}_0$ et $\vec{b}_0$ sont orthogonaux. Par conséquent, on peut prendre les vecteurs

$$\vec{a} = \frac{\vec{a}_0}{\|\vec{a}_0\|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \frac{\vec{b}_0}{\|\vec{b}_0\|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et donc comme base orthonormée de $E_1(A)$ la famille $\mathcal{B}_1 = (\vec{a}, \vec{b})$. [*Remarque : le procédé de Gram-Schmidt aboutira au même résultat.*]

Pour $\lambda_1 = 3$. Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. On a

$$\vec{u} \in E_3(A) \Leftrightarrow (A - 3Id)\vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x - y = 0 \;\&\; z = 0.$$

D'où

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et donc la famille $\mathcal{D}_0$ composée du vecteur

$$\vec{c}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

constitue une famille génératrice de $E_3(A)$. Comme $\vec{c}_0$ n'est pas nul, $\mathcal{D}_0$ est libre et est donc une base de $E_3(A)$.

Pour trouver une base orthonormée, il suffit de normaliser $\vec{c}_0$. Donc on prend le vecteur

$$\vec{c} = \frac{\vec{c}_0}{\|\vec{c}_0\|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

et donc comme base orthonormée de $E_3(A)$ la famille $\mathcal{D}_1 = (\vec{c})$.

5. Expliciter une base orthonormée $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$, formée de vecteurs propres de f, par rapport à laquelle la matrice de f est une matrice diagonale D, ainsi qu'une matrice orthogonale P telle que $A = PDP^{-1}$. (1pt)

   Comme les sous-espaces propres sont deux-à-deux orthogonaux, la famille $\mathcal{B} = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ constitue une famille orthonormée. Elle est également une base de $\mathbb{R}^3$. La matrice P est la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{C}$ à $\mathcal{B}$ (c'est une matrice orthogonale)

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   et D est la matrice

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

   ces matrices vérifient la relation $A = PDP^{-1}$.

Exercice 2. (6 pts) On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad xy'' + y' + 2y = 0$$

avec la condition initiale

$$(CE) \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = -2.$$

On suppose que (E) admet une solution développable en série entière au voisinage de 0, $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, de rayon de convergence $R > 0$ et vérifiant la condition initiale (CE).

1. Calculer a_0 et a_1 à l'aide de (CE). (1 pt)

   D'après la formule de Taylor-Maclaurin,

$$a_0 = \frac{y(0)}{0!} = y(0) = 1, \; a_1 = \frac{y'(0)}{1!} = y'(0) = -2.$$

2. Montrer que a_n vérifie la relation de récurrence

$$a_{n+1} = \frac{-2}{(n+1)^2} a_n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

   (3 pts)

   On a

$$y'(x) = \sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1}$$

   et

$$y''(x) = \sum_{n \geq 2} n(n-1) a_n x^{n-2}.$$

En remplaçant dans (E),

$$\begin{aligned}
xy''(x)+y'(x)+2y(x) &= x\sum_{n\geq 2} n(n-1)a_nx^{n-2}+\sum_{n\geq 1} na_nx^{n-1}+2\sum_{n\geq 0} a_nx^n \\
&= \sum_{n\geq 2} n(n-1)a_nx^{n-1}+\sum_{n\geq 1} na_nx^{n-1}+\sum_{n\geq 0} 2a_nx^n \\
&= \sum_{n\geq 1}[n(n-1)+n]a_nx^{n-1}+\sum_{n\geq 0} 2a_nx^n \\
&= \sum_{n\geq 1} n^2a_nx^{n-1}+\sum_{n\geq 0} 2a_nx^n \\
&= \sum_{n\geq 0}(n+1)^2a_{n+1}x^n+\sum_{n\geq 0} 2a_nx^n \\
&= \sum_{n\geq 0}[(n+1)^2a_{n+1}+2a_n]x^n.
\end{aligned}$$

D'où, par l'unicité du développement en série entière

$$(n+1)^2a_{n+1}+2a_n=0 \text{ pour tout } n\geq 0,$$

ce qu'on peut réécrire

$$a_{n+1}=\frac{-2}{(n+1)^2}a_n, \text{ pour tout } n\geq 0.$$

3. Montrer par récurrence que a_n est donnée par

$$a_n=\frac{(-1)^n2^n}{n!^2} \text{ pour tout } n\geq 0.$$

(1 pt)

Posons

$$\mathcal{P}(n)\ :\ a_n=\frac{(-1)^n2^n}{n!^2}$$

et montrons par récurrence sur $n\geq 0$ que $\mathcal{P}(n)$ est vraie.
Pour $n=0$ on a

$$a_0=\frac{(-1)^02^0}{0!^2}=1$$

et donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Soit $n\in\mathbb{N}$ et supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Montrons $\mathcal{P}(n+1)$. On a

$$a_{n+1}=\frac{-2}{(n+1)^2}a_n \text{ et par hypothèse de récurrence } a_n=\frac{(-1)^n2^n}{n!^2}$$

et donc

$$a_{n+1}=\frac{-2}{(n+1)^2}\cdot\frac{(-1)^n2^n}{n!^2}=\frac{-(-1)^n\cdot(2\times 2^n)}{\big((n+1)n!\big)^2}=\frac{(-1)^{n+1}2^{n+1}}{(n+1)!^2}$$

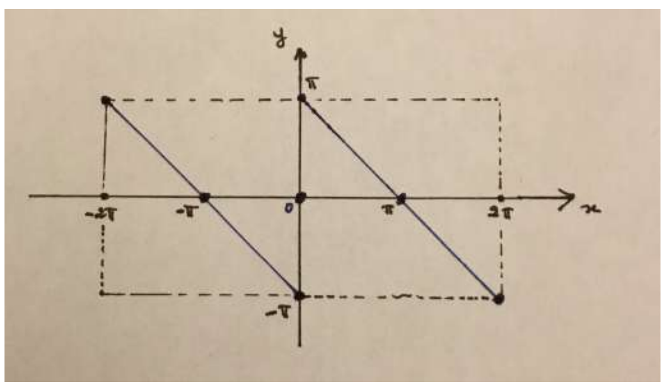
qui est la formule recherchée. Par conséquent $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n\geq 0$.

4. Calculer le rayon de convergence de la série entière ainsi obtenue. (1 pt)

La série obtenue est
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n!^2} x^n.$$
Pour calculer le rayon de convergence on utilise le critère de D'Alembert
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)!^2} \cdot \frac{n!^2}{2^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{(n+1)^2} = 0$$
et par conséquent le rayon de convergence est $R = +\infty$.

Exercice 3. (9 pts) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie par
$$f(x) = \begin{cases} -x - \pi & \text{pour } x \in [-\pi, 0[\\ -x + \pi & \text{pour } x \in]0, \pi] \\ 0 & \text{pour } x = 0. \end{cases}$$

1. Dessiner le graphe de f sur $[-\mathbf{2}\pi, \mathbf{2}\pi]$. (1pt)



2. Montrer que f est impaire. (1pt)

Comme f est 2π-périodique, il suffit de montrer que $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in [-\pi, \pi]$. Quand $x > 0$ (donc $x \in]0, \pi]$) on a $-x \in [-\pi, 0[$ et donc d'après la définition de f
$$f(x) = -x + \pi, \quad f(-x) = -(-x) - \pi = x - \pi = -(-x + \pi) = -f(x).$$
Quand $x < 0$ (donc $x \in [-\pi, 0[$) on a $-x \in]0, \pi]$ et donc d'après la définition de f
$$f(x) = -x - \pi, \quad f(-x) = -(-x) + \pi = x + \pi = -f(x).$$
Enfin pour $x = 0$ on a $f(-0) = 0 = -f(0)$. Donc f est impaire.

3. Montrer que le coefficient b_n de la série de Fourier de f est donné par :

$$b_n = \frac{2}{n} \text{ pour tout } n \geq 1.$$

(2 pts)

La fonction f est impaire et donc $a_n = 0$ pour tout $n \geq 0$. On calcule b_n pour tout $n \geq 1$. On a

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (\pi - x)\sin(nx)\,dx \\
&= \frac{2}{\pi}\Big(\pi\int_0^\pi \sin(nx)\,dx - \int_0^\pi x\sin(nx)\,dx\Big) \\
&= \frac{2}{\pi}\Big(\pi\Big[\frac{-\cos(nx)}{n}\Big]_0^\pi - \int_0^\pi x\sin(nx)\,dx\Big) \\
&= \frac{2(1-(-1)^n)}{n} - \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\sin(nx)\,dx.
\end{aligned}$$

On calcule la seconde intégrale en utilisant une IPP

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi x\sin(nx)\,dx &= \Big[\frac{-x\cos(nx)}{n}\Big]_0^\pi + \int_0^\pi \frac{\cos(nx)}{n}\,dx \\
&= \frac{-\pi(-1)^n}{n} + \Big[\frac{\sin(nx)}{n^2}\Big]_0^\pi = \frac{-\pi(-1)^n}{n}.
\end{aligned}$$

Enfin on a

$$b_n = \frac{2(1-(-1)^n)}{n} - \frac{2}{\pi}\cdot\frac{-\pi(-1)^n}{n} = \frac{2}{n}$$

qui est la formule recherchée. [*Remarquons qu'on aurait pu également utiliser le changement de variable* $t = \pi - x$].

4. Écrire la série de Fourier de f dont la somme sera notée Sf. (0.5 pt)

La série de Fourier de f est

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}\sin(nx).$$

5. Pour quelles valeurs de x a-t-on $Sf(x) = f(x)$? (1,5 pts)

On voit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur la période $[-\pi, \pi]$. En effet f est une droite sur chacun des intervalles $]0, \pi]$ et $[-\pi, 0[$. On voit donc que f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$. Par conséquent d'après le théorème de Dirichlet on a

$$Sf(x) = \frac{1}{2}(f(x^-) + f(x^+))$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$. Les points de discontinuité de f sont les points de la forme $2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$. De même ici on raisonne sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$ et on généralise sur $\mathbb{R}$.
Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a pour $x = 2k\pi$

$$f(x^+) = \lim_{h\to 0^+} f(2k\pi + h) = \lim_{h\to 0^+} f(h) = \pi$$

$$f(x^-) = \lim_{h\to 0^-} f(2k\pi + h) = \lim_{h\to 0^-} f(h) = -\pi$$

et donc $Sf(2k\pi) = 0$. Or $f(2k\pi) = f(0) = 0$. Donc finalement $SF(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

6. Calculer la somme

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1}.$$

(1,5 pts)

[*Indication : utiliser le théorème de Dirichlet pour une valeur de* x *bien choisie entre* 0 *et* π.]

En prenant $x = \frac{\pi}{2}$ et en utilisant la question précédente, on a

$$f(x) = Sf(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} \sin(nx)$$

ce qui donne donc

$$\frac{-\pi}{2} + \pi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} \sin(n \cdot \frac{\pi}{2}).$$

Or

$$\sin(n \cdot \frac{\pi}{2}) = \begin{cases} 0 & \text{pour } n = 2p, \\ (-1)^p & \text{pour } n = 2p+1. \end{cases}$$

Donc

$$\frac{\pi}{2} = 2 \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1}$$

et enfin

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} = \frac{\pi}{4}$$

7. En utilisant l'identité de Parseval, où a_n et b_n sont les coefficients de Fourier de la fonction f,

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 \, dx$$

calculer la somme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

En utilisant donc l'identité de Parseval, on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{n^2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 \, dx$$

et comme f est une fonction impaire (et donc f^2 est paire) on a

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 \, dx = 2 \int_0^{\pi} f(x)^2 \, dx = 2 \int_0^{\pi} (\pi - x)^2 \, dx = 2 \int_0^{\pi} t^2 \, dt = \frac{2\pi^3}{3}.$$

Enfin en simplifiant

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

(1.5 pts)