CONTRÔLE CONTINU 3

Mercredi 11 décembre 2019

Durée : 75 minutes (16h00-17h15)

Les documents, les calculatrices et les téléphones portables ne sont pas autorisés. Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque. Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées. La clarté de la rédaction constituera un élément important dans l'appréciation des copies. Le barème est à titre indicatif.

Questions de cours. (3 pts)

1. Donner le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$. (1,5 pts)
2. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application. Donner la définition du fait que f est de classe C^1 par morceaux sur $[a, b]$. (1,5 pts)

Exercice 1. (6 pts) On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$u_n = \frac{\sin(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}})}{n^3 \ln(1 + \frac{1}{\sqrt{n}})}, \quad n \geq 1.$$

1. Montrer que
$$u_n \sim_{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{7}{2}}}.$$
(2 pts)
2. Montrer que la série numérique $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ est convergente. (2 pts)
3. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n z^n$. (2 pts)

Exercice 2. (4 pts) On souhaite déterminer le développement en série entière de l'application

$$f : I =]-1, 1[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = \ln(x^2 - 5x + 4)$$

au point $x_0 = 0$.

1. Déterminer le développement en série entière sur I en 0 des applications
$$g : x \mapsto g(x) = \frac{1}{1-x}, \quad h : x \mapsto h(x) = \frac{1}{4-x}.$$
(1 pt)

2. En déduire le développement en série entière sur I en 0 des applications

$$x \mapsto \ln(1-x), \quad x \mapsto \ln(4-x).$$

(2 pts)

3. Déterminer le développement en série entière recherché de l'application f. (1 pt)

Exercice 3. (7 pts) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique paire définie par

$$f(x) = x \quad \text{sur} \quad [0, \pi].$$

1. Dessiner le graphe de f sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$. (1 pt)
2. Montrer que le coefficient a_n de la série de Fourier de f est donné par :

$$a_0 = \pi \ \text{ et } \ a_n = \frac{2\big((-1)^n - 1\big)}{\pi n^2} \text{ pour tout } n \geq 1.$$

(3 pts)

3. Écrire la série de Fourier de f dont la somme sera notée Sf. (1 pt)
4. Pour quelles valeurs de x a-t-on $Sf(x) = f(x)$? (1 pt)
5. En déduire la valeur de la somme

$$\sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

(1 pt)