CONTRÔLE CONTINU 2

Mercredi 13 novembre 2019

Durée : 1 heure (16h15-17h15)

Les documents, les calculatrices et les téléphones portables ne sont pas autorisés. Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque. Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées. La clarté de la rédaction constituera un élément important dans l'appréciation des copies. Le barème est à titre indicatif.

Questions de cours. (3 pts)

1. Soit E un espace euclidien. Donner la définition d'une base orthonormée de E.
2. Est-il vrai que les sous-espaces propres d'une matrice symétrique sont orthogonaux ? (1 pt)
3. Parmi les matrices suivantes, déterminer, en justifiant (mais sans calcul !), celles qui sont diagonalisables dans une base orthonormée (par rapport au produit scalaire usuel considéré)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ i & 3 & 2i \\ 0 & 2i & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 7 & -4 \\ 0 & -4 & 7 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \\ 0 & 7 & 3 \end{pmatrix}.$$

(1 pt)

Exercice 1. (6 pts) On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ défini par l'équation $x - y - z = 0$.

1. Donner une base de F. (1 pt)
2. Déterminer une base orthonormée de F. (3 pts)
3. Calculer la projection orthogonale du vecteur $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$ sur F. (2 pts)

Exercice 2. (11 pts) On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique et la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer les valeurs propres de A. (3 pts)
2. Déterminer une base orthonormée des sous-espaces propres associés aux valeurs propres de A. (3 pts)

3. Expliciter une base orthonormée $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de A et une matrice diagonale D, ainsi qu'une matrice orthogonale P telles que $A = PDP^{-1}$. (2 pts)
4. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. (3 pts)

Exercice 3. Bonus (3 pts) Déterminer la nature (convergence, semi-convergence, convergence absolue, divergence, divergence grossière) des séries $\sum u_n$ de terme généraux

$$(1)\ u_n = \frac{(-1)^n}{n\sqrt{\ln(n)}},\ n \geq 2,\quad (2)\ u_n = \frac{2^n}{n^3+1}, n \geq 0,\quad (3)\ u_n = \frac{1}{3^n \ln(1+\frac{1}{n^5})}, n \geq 1.$$