CONTRÔLE CONTINU 1

Mercredi 09 octobre 2019

Durée : 1 heure (16h15-17h15)

Les documents, les calculatrices et les téléphones portables ne sont pas autorisés. Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque. Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées. La clarté de la rédaction constituera un élément important dans l'appréciation des copies. Le barème est à titre indicatif.

Questions de cours.

1. Donner la formule de Grassmann. (1 pt)
2. Donner la definition d'une matrice inversible. (1 pt)
3. Donner la définition du rang d'une matrice. (1 pt)

Exercice 1. On considère $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Soit $\mathcal{C} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ la famille de vecteurs

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

donnés en composantes dans la base canonique $\mathcal{B}$.

1. Montrer que $\mathcal{C}$ est une famille libre. En déduire que c'est une base de $\mathbb{R}^3$. (2 pts)
2. Donner la matrice de passage $P_{\mathcal{BC}}$ de la base canonique $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$. (1 pt)
3. Calculer $P_{\mathcal{BC}}^{-1}$. Quelle est la matrice de passage $P_{\mathcal{CB}}$ de la base $\mathcal{C}$ à la base canonique $\mathcal{B}$? (3 pts)
4. En déduire l'expression du vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{C}$. (2 pts)

Exercice 2. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, par

$$f(x, y, z) = (x + y + z, y - z, x - 2y + 4z).$$

1. Déterminer une base du noyau de f. Quel est le rang de f ? (3 pts)
2. Déterminer la matrice A de f par rapport à la base canonique. (1 pts)
3. A-t-on $det(A) \neq 0$? Que peut-on dire sur le rang de A ? (2 pts)

Exercice 3. (3 pts) Résoudre, suivant les valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$, le système d'équations linéaires suivant :

$$(S) \quad \begin{cases} 3x + y - z = 1, \\ x - 2y + 2z = 2, \\ x + y - z = \lambda. \end{cases}$$