

Feuille d'exercices n° 8
ANALYSE ASYMPTOTIQUE

Exercice 1. « Nettoyer » les expressions suivantes :

1. $f(x) =_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) + 3 + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$.
2. $u_n =_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2^n} + o\left(\frac{1}{2^n}\right) + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n^2}$.
3. $g(x) =_{x \rightarrow 0} x + o(x) + x \ln(x) + o(x^2 \ln x) + x^2 + o(x^2)$.
4. $v_n =_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} + \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right) + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{n \ln n} + o\left(\frac{1}{n \ln n}\right)$.
5. $w_n =_{n \rightarrow +\infty} n + o(n) + \sqrt{n} + o(\sqrt{n}) + \frac{n^2}{\ln n} + n \ln n + o(n \ln n)$.

Exercice 2.

1. En interprétant les expressions suivantes comme des taux d'accroissement, calculer les limites suivantes lorsque x tend vers 0 :

a) $\frac{\sin(x)}{x}$,	b) $\frac{\tan(x)}{x}$,	c) $\frac{e^x - 1}{x}$,
d) $\frac{\text{sh}(x)}{x}$,	e) $\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x}$, où $\alpha \in \mathbf{R}^*$.	

2. En exploitant l'identité $\cos(x) = 1 - 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)^2$ pour tout $x \in \mathbf{R}$, calculer

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2}.$$

3. Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite réelle qui converge vers 0. Donner des équivalents simples lorsque n tend vers $+\infty$ des suites de terme général ci-dessous :

a) $\sin(u_n)$,	b) $\tan(u_n)$,	c) $\ln(1 + u_n)$,
d) $e^{u_n} - 1$,	e) $\text{sh}(u_n)$,	f) $1 - \cos(u_n)$,
g) $(1 + u_n)^\alpha - 1$, où $\alpha \in \mathbf{R}^*$.		

Exercice 3. Donner des équivalents simples lorsque n tend vers $+\infty$ pour les suites de termes général ci-dessous :

a) $u_n = n^{\frac{1}{n}} - 1$,	b) $u_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}$,	c) $u_n = \ln(n + \sqrt{n^2 + 1})$,
d) $u_n = (n + 3 \ln(n))e^{-(n+1)}$,	e) $u_n = \frac{n! + e^n}{2^{n+3n}}$,	f) $u_n = n \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Exercice 4. Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite réelle à termes positifs. Démontrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes :

- a) La suite (u_n) ne tend pas vers $+\infty$.
- b) On peut extraire de (u_n) une sous-suite majorée.
- c) On peut extraire de (u_n) une sous-suite convergente.

Exercice 5. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{|n^2 - u_n|}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \leq n$.
2. En déduire un équivalent de u_n quand $n \rightarrow \infty$.

Exercice 6. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par

$$u_0 = 1 \text{ et } u_{n+1} = 1 + \frac{n}{u_n} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Établir l'encadrement

$$\sqrt{n} \leq u_n \leq \sqrt{n} + 1$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis en déduire un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 7. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons

$$a_n = \sqrt{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} \text{ et } b_n = \sqrt{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}}.$$

Déterminer des équivalents simples lorsque n tend vers $+\infty$ des suites (a_n) , (b_n) et $(a_n + b_n)$.

Exercice 8. Calculer les limites suivantes :

- | | | |
|---|--|--|
| a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+5}{3x-4}$, | b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-1}{x^2-1}$, | c) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x^2} \right)$, |
| d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1+x}-1}$, | e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+x+1} - (x+1)$, | f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x}$, |
| g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{\sqrt{x}}$, | h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{\sin(3x)}$, | i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin(1/x)}{\sin(x)}$, |
| j) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\cos(\pi x)}{1-2x}$, | k) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} (2x^2+x-1) \tan(\pi x)$, | l) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)-1}{x^2}$, |
| m) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(3x))}{\ln(\cos(2x))}$, | n) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\sin(x)^2}$, | o) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x)^2 - \sqrt{x}$, |
| p) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x)}{\ln(x)}$, | q) $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} \ln(x)^3$, | r) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\exp(\ln(x)^2)}{x^n}$. |

Exercice 9. Déterminer tous les nombres réels a, b tels que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{a}{\ln(1+x)} - \frac{b}{e^x-1} \right) = 0.$$

Exercice 10. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction périodique admettant une limite finie en $+\infty$. Que peut-on dire de f ?

Exercice 11. Démontrer que les fonctions suivantes n'ont pas de limite :

- | | |
|---|--|
| a) $x \mapsto \sin(\cos(x))$ en $+\infty$; | b) $x \mapsto \sin\left(x + \frac{1}{x}\right)$ en 0 ; |
| c) $x \mapsto \frac{x^x}{\lfloor x \rfloor^{\lfloor x \rfloor}}$ en $+\infty$; | d) $x \mapsto \cos\left(e^{1/x^2}\right)$ en 0. |