Université Claude Bernard Lyon 1 — UE Fondamentaux des Mathématiques I
Semestre d'automne 2019-2020

Examen final (2 h)
Mercredi 18 décembre 2019

Le sujet comporte 4 exercices indépendants.

Exercice 1. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers naturels définie par

$$\begin{cases} u_0 &= 14, \\ u_{n+1} &= 5u_n - 6, \ \ n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Calculer u_{n+2} en fonction de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, en déduire que $u_{n+2} \equiv u_n$ [4].
   (b) Montrer par récurrence sur k, que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_{2k} \equiv 2$ [4].
   (c) Bonus : en déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_{2k+1} \equiv 0$ [4].
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que $u_n = \dfrac{5^{n+2}+3}{2}$.
5. Montrer que pour tout entier $m \geq 2$, $5^m \equiv 25$ [100].
6. En utilisant les deux questions précédentes, en déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2u_n \equiv 28$ [100].
7. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \equiv 14$ [50].
8. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \equiv 14$ [100] ou $u_n \equiv 64$ [100]
9. En utilisant les questions 3 et 8, montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_{2k} \equiv 14$ [100]
   Bonus : montrer également que $u_{2k+1} \equiv 64$ [100].
10. En déduire que les deux derniers chiffres de u_n sont 14 si n est pair et 64 si n est impair.

Solution.

1. $u_1 = 5 \cdot 14 - 6 = 64$, $u_2 = 5 \cdot 64 - 6 = 314$ et $u_3 = 5 \cdot 314 - 6 = 1564$.
2. $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6 = 5\,(5u_n - 6) - 6 = 25u_n - 36$.
3. (a) $U_{n+2} = 25u_n - 36 \equiv u_n$ [4] puisque $25 = 4 \cdot 6 + 1 \equiv 1$ [4] et $36 = 4 \cdot 9 \equiv 0$ [4].
   (b) Par récurrence. Initialisation : $u_{2\cdot 0} = u_0 = 14 = 4 \cdot 3 + 2 \equiv 2$ [4]. Hérédité : Supposons $u_{2k} \equiv 2$ [4]. D'après la partie (a) on a $u_{2(k+1)} = u_{2k+2} \equiv u_{2k} \equiv 2$ [4]. Ainsi $u_{2k} \equiv 2$ [4] pour tout $k \in \mathbb{N}$.
   (c) D'après la partie (b) on a $u_{2k+1} = 5u_{2k} - 6 \equiv 5 \cdot 2 - 6 = 4 \equiv 0$ [4].

4. Par récurrence. Initialisation : $u_0 = 14 = (5^{0+2}+3)/2$.
   Hérédité : Supposons $u_n = (5^{n+2}+3)/2$. Alors

$$u_{n+1} = 5u_n - 6 = 5\,\frac{5^{n+2}+3}{2} - 6 = \frac{5^{(n+1)+2}+15}{2} - 6 = \frac{5^{(n+1)+2}+3}{2}.$$

   Ainsi l'énoncé est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   Alternative. Il s'agit d'une suite récurrente d'ordre 1. On calcule le point fixe : $u = 5u-6$ donne $4u = 6$ et $u = \frac{3}{2}$. On considère alors la suite $v_n = u_n - u = u_n - \frac{3}{2}$. On a $v_0 = 14 - \frac{3}{2} = \frac{25}{2}$, et

$$v_{n+1} = u_{n+1} - u = 5u_n - 6 - u = 5\,(v_n + u) - 6 - u = 5v_n + (5u - 6 - u) = 5v_n.$$

   Ainsi v_n est une suite géométrique avec $v_n = 5^n v_0 = 5^n\,\frac{25}{2} = \frac{5^{n+2}}{2}$, et

$$u_n = v_n + u = \frac{5^{n+2}}{2} + \frac{3}{2} = \frac{5^{n+2}+3}{2}.$$

5. Par récurrence. Initialisation : $5^2 \equiv 25\,[100]$. Hérédité : Supposons $m \geq 2$ et $5^m \equiv 25\,[100]$. Alors $5^{m+1} = 5 \cdot 5^m \equiv 5 \cdot 25 = 125 \equiv 25\,[100]$.
   Ainsi l'énoncé est vrai pour tout $m \in \mathbb{N}$.
6. On a $2u_n = 5^{n+2} + 3 \equiv 25 + 3 = 28\ [100]$.
7. On a $2u_n - 28 = 100z$ pour un $z \in Z$, et donc $u_n - 14 = 50z$. Ainsi $u_n \equiv 14\ [50]$.
8. Si $u_n - 14 = 50z$, soit $z = 2z'$ est pair ; alors $u_n - 14 = 100z'$ et $u_n \equiv 14\ [100]$.
   Soit $z = 2z' - 1$ est impair, et $u_n - 14 = 100z' - 50$, d'où $u_n \equiv 14 + 50 = 64\,[100]$.
9. Puisque $4 \mid 100$, si $u_n \equiv 14\,[100]$ alors $u_n \equiv 14 \equiv 2\ [4]$, et si $u_n \equiv 64\ [100]$ alors $u_n \equiv 64 \equiv 0\ [4]$. Dans le premier cas n doit être pair, et dans le deuxième cas n doit être impair d'après la partie 3.(b) et (c). D'après 8. on est toujours dans un des deux cas. Ainsi $u_{2k} \equiv 14\ [100]$ et $u_{2k+1} \equiv 64\ [100]$.
10. Les deux dernières chiffres d'un entier m forment le reste de m lors de la division euclidienne de m par 100, et donc l'unique entier entre 0 et 99 congru à m modulo 100. Ainsi les deux dernières chiffres de u_n sont 14 si n est pair, et 64 si n est impair.

<u>Exercice 2.</u> Calculer $pgcd(A,B)$ avec $A, B \in \mathbb{R}[X]$ définis par

$$A = X^3 - X^2 - X - 2 \quad \text{et} \quad B = X^5 - 2X^4 + X^2 - X - 2.$$

Solution. On applique l'alorithme d'Euclide.

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
X^5 & -2X^4 & & +X^2 & -X & -2 & X^3 - X^2 - X - 2 \\ \cline{7-7}
X^5 & -X^4 & -X^3 & -2X^2 & & & X^2 - X \\
 & -X^4 & +X^3 & +3X^2 & -X & -2 & \\
 & -X^4 & +X^3 & +X^2 & +2X & & \\
 & & & 2X^2 & -3X & -2 &
\end{array}$$

Le premier reste (sous forme unitaire) est donc $X^2 - \frac{3}{2}X - 1$.

$$
\begin{array}{llll|l}
X^3 & -X^2 & -X & -2 & X^2 - \frac{3}{2}X - 1 \\ \cline{5-5}
X^3 & -\frac{3}{2}X^2 & -X & & X + \frac{1}{2} \\
 & \frac{1}{2}X^2 & & -2 & \\
 & \frac{1}{2}X^2 & -\frac{3}{4}X & -\frac{1}{2} & \\
 & & \frac{3}{4}X & -\frac{3}{2} &
\end{array}
$$

Le deuxième reste (sous forme unitaire) est donc $X - 2$.

$$
\begin{array}{llll|l}
X^2 & -\frac{3}{2}X & -1 & & X - 2 \\ \cline{5-5}
X^2 & -2X & & & X + \frac{1}{2} \\
 & \frac{1}{2}X & -1 & & \\
 & \frac{1}{2}X & -1 & & \\
 & & 0 & &
\end{array}
$$

Puisque le troisième reste est 0, on a $\operatorname{pgcd}(A,B) = X - 2$.
Alternative. On devine $A(2) = 8 - 4 - 2 - 2 = 0$. Ainsi $X - 2$ divise A. On divise :

$$X^3 - X^2 - X - 2 = (X - 2)(X^2 + X + 1).$$

Or, les racines de $X^2 + X + 1$ sont les racines primitives troisièmes de l'unité j et j^2. Ainsi

$$B = (X - 2)(X - j)(X - j^2).$$

On évalue B aux points 2 et j. On a $B(2) = 32 - 2 \cdot 16 + 4 - 2 - 2 = 0$ et

$$B(j) = j^2 - 2j + j^2 - j - 2 = 2j^2 - 3j - 2 = 2\,(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}) - 3\,(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) - 2 \neq 0.$$

Alors $B(j^2) = B(\bar{j}) = \overline{B(j)} \neq 0$. Ainsi le seul facteur irréductible de A qui divise B est $X - 2$, et $\operatorname{pgcd}(A,B) = X - 2$.

Exercice 3. Considérons l'application $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par par $f(x) = e^{1/x}$.

1. Justifier que cette application est dérivable sur son domaine de définition, et calculer f' sur ce domaine.
2. Montrer que la dérivée f' est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Rappeler le théorème des accroissements finis.
4. Fixons $x > 0$.
   (a) Utiliser ce théorème pour montrer qu'il existe $c \in]x, x+1[$ tel que
   $$f(x) - f(x+1) = \frac{e^{1/c}}{c^2}.$$
   (b) D'après la question 2, montrer alors que
   $$\frac{e^{1/(x+1)}}{(x+1)^2} \leq \frac{e^{1/c}}{c^2} \leq \frac{e^{1/x}}{x^2}.$$

(c) En utilisant les deux questions précédentes, montrer que

$$\frac{x^2 e^{1/(x+1)}}{(x+1)^2} \leq x^2(e^{1/x} - e^{1/x+1)}) \leq e^{1/x}.$$

5. En déduire $\lim_{x\to+\infty} x^2(e^{1/x} - e^{1/(x+1)})$.

Solution.

1. Pour $r \in \mathbb{R}$ la fonction $x \mapsto x^r$ de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$ est derivable avec dérivée $x \mapsto rx^{r-1}$ (ici on a $r = -1$), et la fonction $x \mapsto e^x$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$ est dérivable avec dérivée $x \mapsto e^x$. Ainsi leur composition f est dérivable, avec $f'(x) = -e^{1/x}x^{-2}$.
2. f' est encore dérivable comme produit de fonctions dérivables, et pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a
$$f''(x) = e^{1/x}x^{-2}x^{-2} - e^{1/x}(-2)x^{-3} = e^{1/x}(x^{-4} + 2x^{-3}) > 0.$$
Ainsi f' est croissante.
3. Théorème des accroissements finis (TAF) : Soit $a < b =$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Alors il y a $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
4. (a) Pour $x > 0$ la fonction f est continue sur $[x,x+1]$ et dérivable sur $]x,x+1[$. D'après le TAF il y a donc $c \in]x,x+1[$ tel que
$$-\frac{e^{1/c}}{c^2} = f'(c) = \frac{f(x+1) - f(x)}{(x+1) - x} = f(x+1) - f(x).$$
Ainsi $f(x) - f(x+1) = \frac{e^{1/c}}{c^2}$.

   (b) Puisque f' est croissante, $-f'$ est décroissante, et
$$\frac{e^{1/(x+1)}}{(x+1)^2} = -f'(x+1) \leq \frac{e^{1/c}}{c^2} = -f'(c) \leq \frac{e^{1/x}}{x^2} = -f'(x).$$

   (c) En multipliant avec $x^2 > 0$ et en substituant l'égalité de la partie (a) on obtient
$$\frac{x^2 e^{1/(x+1)}}{(x+1)^2} \leq x^2 \frac{e^{1/c}}{c^2} = x^2 \left(f(x) - f(x+1)\right) = x^2 \left(e^{1/x} - e^{1/x+1)}\right) \leq e^{1/x}.$$
5. D'après le théorème des gendarmes,

$$1 = 1 \cdot e^0 = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{(x+1)^2} \lim_{x\to\infty} e^{1/(x+1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 e^{1/(x+1)}}{(x+1)^2} \leq \lim_{x\to\infty} x^2(e^{1/x} - e^{1/(x+1)}) \leq \lim_{x\to\infty} e^{1/x} = e^0 = 1.$$

La limite vaut donc 1.

Exercice 4. Les questions 1 et 2 de cet exercice sont indépendantes.

1. Résoudre $iz^2 + 2z + (1-i) = 0$ dans $\mathbb{C}$.
2. On considère le complexe $z = 1 + i\sqrt{3}$.
   (a) Calculer $z + \bar{z}$ et $z - \bar{z}$.
   (b) Écrire z sous forme exponentielle.
   (c) Calculer $z^5 + \bar{z}^5$.
   (d) Calculer $z^5 - \bar{z}^5$.

Solution.

1. Le discriminant vaut $\Delta = 2^2 - 4 \cdot i \cdot (1-i) = 4 - 4i + 4i^2 = -4i = 4e^{-i\pi/2}$.
   Si $\delta = 2e^{-i\pi/4} = \sqrt{2}\,(1-i)$, alors $(\pm\delta)^2 = \Delta$, et les deux solutions sont

$$z_1 = \frac{-2+\delta}{2i} = i - \frac{\sqrt{2}}{2}\,(1+i) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}) \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-2-\delta}{2i} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}).$$

2. (a) $z + \bar{z} = 2\mathrm{Re}(z) = 2$ et $z - \bar{z} = 2i\mathrm{Im}(z) = 2i\sqrt{3}$.
   (b) $z = 2\,(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 2\,(\cos(\frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{3})) = 2e^{i\pi/3}$.
   (c) et (d). On a

$$\begin{aligned} z^5 &= 2^5 e^{i5\pi/3} = 32\,(\cos(\tfrac{5}{3}\pi) + i\sin(\tfrac{5}{3}\pi)) = 32\,(\cos(-\tfrac{1}{3}\pi) + i\sin(-\tfrac{1}{3}\pi)) \\ &= 32\,(\cos(\tfrac{\pi}{3}) - i\sin(\tfrac{\pi}{3})) = 16\bar{z}. \end{aligned}$$

   Ainsi $z^5 + \bar{z}^5 = 2\mathrm{Re}(z^5) = 32\mathrm{Re}(\bar{z}) = 32$ et $z^5 - \bar{z}^5 = 2i\mathrm{Im}(z^5) = 32i\mathrm{Im}(\bar{z}) = -32i\sqrt{3}$.