Fondamentaux des mathématiques - DS n°4
Partie CUPGE

Exercice 1 :

1. Établir une identité de Bézout entre 871 et 377 et leur pgcd.
2. Donner une solution n_0 pour le système de congruences $x \equiv 5 \mod 871$ et $x \equiv 96 \mod 377$.
3. Donner toutes les solutions pour ce système.
4. Donner toutes les solutions pour le système de congruences $x \equiv 3 \mod 871$ et $x \equiv 80 \mod 377$.

Justifier les réponses. Il suffira de donner des entiers supérieurs à 1000 sous forme d'expression numérique.

Solution.

1. Un utilise l'algorithme d'Euclide.
$$\begin{array}{rcl} 871 &=& 2\cdot 377+117 \\ 377 &=& 3\cdot 117+26 \\ 117 &=& 4\cdot 26+13 \\ 26 &=& 2\cdot 13+0 \end{array} \qquad \begin{array}{rclcl} 13 &=& 13\cdot(871-2\cdot 377)-4\cdot 377 &=& 13\cdot 871-30\cdot 377 \\ 13 &=& 117-4\cdot(377-3\cdot 117) &=& 13\cdot 117-4\cdot 377 \\ 13 &=& 117-4\cdot 26 && \\ 13 &=& \mathrm{pgcd}(871,377) && \end{array}$$
2. On a $\frac{871}{13}=67$ et $\frac{377}{13}=29$. Donc $1=13\cdot 69-30\cdot 29$. On pose
$$n_0=96\cdot 13\cdot 67-5\cdot 30\cdot 29=79266.$$
Ceci est une solution particulière d'après le cours (ou par vérification : $79266-5=79261=871\cdot 29$ et $79266-96=79170=377\cdot 210$).
3. L'ensemble de toutes les solutions est donc
$$n_0+\mathrm{ppcm}(871,377)\cdot\mathbb{Z}=n_0+\frac{871\cdot 377}{\mathrm{pgcd}(871,377)}\cdot\mathbb{Z}=79266+25259\cdot\mathbb{Z}=3489+25259\cdot\mathbb{Z}.$$
Tout n dans cet ensemble est une solution du système, puisqu'on a rajouté à n_0 un multiple du $\mathrm{ppcm}(871,377)$, ce qui ne change pes les conguences modulo 871 ou modulo 377. Réciproquement, si n est une solution, on a $n-n_0$ congru à 0 modulo 871 et modulo 377, donc modulo $\mathrm{ppcm}(871,377)$, et $n-n_0$ est un multiple de ce ppcm.
4. $80-3=77$ n'est pas divisible par $\mathrm{pgcd}(7871,377)=13$. Il n'y a donc pas de solution. Plus précisément, si n était une solution, alors $n\equiv 3 \mod 13$ et $n\equiv 80 \mod 13$, d'où $3\equiv 80 \mod 13$, et $13 \mid 80-3=77$, une contradiction.

Exercice 2 : Soit $n>1$ et ω une racine primitive n-ème de l'unité.

1. Calculer le produit de toutes les racines n-èmes de l'unité.
2. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1}\omega^{kp}$ en fonction de $p\geq 0$.
3. En déduire que $\sum_{k=0}^{n-1}(1+\omega^k)^n=2n$.

Solution.

1. Puisque ω est racine n-ème primitie, les racines n-èmes de l'unité sont les ω^k pour $k=0,1,\dots,n-1$. On a donc
$$\prod_{k=0}^{n-1}\omega^k=\omega^{\sum_{k=0}^{n-1}k}=\omega^{n(n-1)/2}.$$
Or, si n est impair, $\omega^{n(n-1)/2}=(\omega^n)^{(n-1)/2}=1^{(n-1)/2}=1$. Et si n est pair, $(\omega^{n/2})^2=\omega^n=1$ mais $\omega^{n/2}\neq 1$ puisque ω est une racine primitive n-ème. Ainsi $\omega^{n/2}=-1$. On obtient dans les deux cas $\prod_{k=0}^{n-1}\omega^k=(-1)^{n-1}$.

2. Si $n \mid p$ alors $\omega^{kp} = 1$ pour tout k, et $\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kp} = n$. Sinon, $\omega^p \neq 1$ et

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kp} = \frac{(\omega^p)^n - 1}{\omega^p - 1} = \frac{(\omega^n)^p - 1}{\omega^p - 1} = 0.$$

3. On a

$$\sum_{k=0}^{n-1} (1+\omega^k)^n = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} (\omega^k)^p = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kp} = \binom{n}{0} n + \binom{n}{n} n = 2n.$$

<u>Exercice 3 :</u> Pour $n \geq 1$ on pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Montrer que H_n n'est jamais un entier pour $n > 1$.

[Indication : Montrer par récurrence que $H_n = \frac{p}{2^k q}$, où p et q sont impairs et $k = \lfloor \log_2 n \rfloor$. Il conviendra de distinguer le cas où n est une puissance de 2 des autres.]

Solution. On effectue la récurrence indiquée. *Initialisation :* Pour $n = 1$ on a $\log_2 1 = 0$ et $H_1 = \frac{1}{2^0 \cdot 1}$, avec $p = q = 1$. Pour $n = 2$ on a $\log_2 2 = 1$ et $H_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{1 \cdot 2^1}$ avec $p = 3$ et $q = 1$.

Hérédité : On suppose $H_n = \frac{p}{2^k q}$ avec p, q impairs et $k = \lfloor \log_2 n \rfloor$. Ainsi $2^k \leq n < 2^{k+1}$, et $2^k < n+1$. Si $n+1 < 2^k \cdot 2$, alors $2^k \nmid n+1$ et $n+1 = 2^i q'$ avec $i < k$ et q' impair. Ainsi

$$H_{n+1} = H_n + \frac{1}{n+1} = \frac{p}{2^k q} + \frac{1}{2^i q'} = \frac{p 2^{k-i} q' + q}{2^k q q'}.$$

Or, puisque $k > i$ et q est impair, $p2^{k-i}q' + q$ est impair ; comme q, q' sont impairs, qq' aussi. Ainsi H_{n+1} est de la bonne forme.

Sinon, $n+1 = 2^{k+1}$ et $\log_2(n+1) = k+1$. Alors

$$H_{n+1} = H_n + \frac{1}{n+1} = \frac{p}{2^k q} + \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{2p+q}{2^{k+1} q}$$

est encore de la bonne forme puisque $2p + q$ est encore impair.

Dans les deux cas, l'énoncé est vrai. D'après le principe de la récurrence H_n est de la forme indiquée pour tout entier n. En particulier H_n n'est pas entier pour $n > 1$.

<u>Exercice 4 :</u> Pour $n > 0$ on pose $u_n = n - \sum_{k=1}^{n} \cos \frac{1}{k}$ et $v_n = u_n + \sin \frac{1}{n}$. Montrer que $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ convergent vers une même limite.

[Indication : On pourra utiliser que $\sin x = x + o(x^2)$ et $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ en 0.]

Solution. On montre que les suites sont adjacentes. On a $v_n - u_n = \sin \frac{1}{n} \to 0$ pour $n \to \infty$. De plus, $u_{n+1} - u_n = 1 - \cos \frac{1}{n+1} > 0$ et la suite $(u_n)_n$ est croissante. Ensuite, $o(\frac{1}{n^2}) = o(\frac{1}{(n+1)^2})$. Alors

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n = 1 - \cos \frac{1}{n+1} + \sin \frac{1}{n+1} - \sin \frac{1}{n} &= \frac{1}{2(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n^2}) \\ &= \frac{1}{2(n+1)^2} - \frac{1}{n(n+1)} + o(\frac{1}{n^2}) = \frac{n - 2(n+1)}{2n(n+1)^2} + o(\frac{1}{n^2}) \\ &\leq -\frac{1}{2n(n+1)} + o(\frac{1}{n^2}), \end{aligned}$$

ce qui est négatif pour n suffisamment grand. Donc $(v_n)_n$ est décroissant pou n suffisamment grand. Ainsi $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes, et convergent vers une même limite.

<u>Exercice 5 :</u> Soient A et B deux parties non-vides et bornées de $\mathbb{R}$. On note $A+B = \{a+b : a \in A,\ b \in B\}$ et $AB = \{ab : a \in A,\ b \in B\}$.

1. Montrer que $\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$.
2. A-t-on toujours $\sup(AB) = \sup(A)\cdot\sup(B)$? Quelle hypothèse peut-on ajouter pour que cela soit vrai ?

Solution. Soit $a = \sup A$ et $b = \sup B$.

1. Soit $\epsilon > 0$, et $x \in A$, $y \in B$ avec $a - \epsilon/2 < a$ et $b - \epsilon/2 < y$. Alors $x + y \in A + B$, et $x + y > a + b - \epsilon$. Ainsi $\sup(A + B) \geq a + b$. Inversement, si $z \in A + B$ il y a $x \in A$ et $y \in B$ avec $z = x + y$. Comme $x \leq a$ et $y \leq b$ on a $z = x + y \leq a + b$, d'où $\sup(A + B) \leq a + b$, et on a égalité.
2. Si $A = B = [-1, 0]$ alors $\sup A = \sup B = 0 = \sup A \cdot \sup B$, mais $\sup(AB) = \sup[0, 1] = 1 > 0$. Cependant, l'égalité est vraie si A et B sont positifs. Alors si $xy \in AB$ avec $x \in A$ et $y \in B$, on a $x \leq a$ et $y \leq b$, d'où $xy \leq ab$ et $\sup(AB) \leq ab$. Réciproquement, si $a = 0$ ou $b = 0$ il n'y a rien à montrer puisque $A = \{0\}$ ou $B = \{0\}$. Sinon, pour $\epsilon > 0$ suffisamment petit on trouve $x \in A$ et $y \in B$ avec $0 < a - \dfrac{\epsilon}{2(b+1)} < x$ et $0 < b - \dfrac{\epsilon}{2(a+1)} < y$. Alors
$$xy > (a - \frac{\epsilon}{2(b+1)}) \cdot (b - \frac{\epsilon}{2(a+1)}) \geq ab - \epsilon.$$
Ainsi $\sup(AB) \geq ab$ et on a égalité.