**Université Claude Bernard Lyon 1** Semestre d'automne 2019-2020
Cursus prépa - Première année

---

# Fondamentaux des mathématiques - DS n°4
PARTIE CUPGE

---

*L'étudiant attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Il veillera à justifier soigneusement toutes ses réponses. Si un étudiant est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*
*Les exercices sont indépendants et peuvent donc être traités dans n'importe quel ordre. Au cours d'un exercice, lorsqu'un étudiant ne peut répondre à une question, il lui est vivement recommandé de poursuivre en admettant le résultat qui lui était demandé de démontrer.*
**Durée :** *1h30. Les calculatrices ne sont* **pas autorisées.**

**Exercice 1 :**

1. Établir une identité de Bézout entre 871 et 377 et leur pgcd.
2. Donner une solution $n_0$ pour le système de congruences $x \equiv 5 \mod 871$ et $x \equiv 96 \mod 377$.
3. Donner toutes les solutions pour ce système.
4. Donner toutes les solutions pour le système de congruences $x \equiv 3 \mod 871$ et $x \equiv 80 \mod 377$.

Justifier les réponses. Il suffira de donner des entiers supérieurs à 1000 sous forme d'expression numérique.

**Exercice 2 :** Soit $n > 1$ et $\omega$ une racine primitive $n$-ème de l'unité.

1. Calculer le produit de toutes les racines $n$-èmes de l'unité.
2. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kp}$ en fonction de $p \geq 0$.
3. En déduire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (1+\omega^k)^n = 2n$.

**Exercice 3 :** Pour $n \geq 1$ on pose $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Montrer que $H_n$ n'est jamais un entier pour $n > 1$.
[Indication : Montrer par récurrence que $H_n = \dfrac{p}{2^k q}$, où $p$ et $q$ sont impairs et $k = \lfloor \log_2 n \rfloor$. Il conviendra de distinguer le cas où $n$ est une puissance de 2 des autres.]

**Exercice 4 :** Pour $n > 0$ on pose $u_n = n - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos\frac{1}{k}$ et $v_n = u_n + \sin\dfrac{1}{n}$. Montrer que $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ convergent vers une même limite.
[Indication : On pourra utiliser que $\sin x = x + o(x^2)$ et $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$ en 0.]

**Exercice 5 :** Soient $A$ et $B$ deux parties non-vides et bornées de $\mathbb{R}$. On note $A+B = \{a+b : a \in A,\ b \in B\}$ et $AB = \{ab : a \in A,\ b \in B\}$.

1. Montrer que $\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$.
2. A-t-on toujours $\sup(AB) = \sup(A) \cdot \sup(B)$ ? Quelle hypothèse peut-on ajouter pour que cela soit vrai ?