Université Claude Bernard Lyon 1 Semestre automne 2019–2020
Cursus prépa - Première année

Fondamentaux des mathématiques - Corrigé du DS n°4
PARTIE COMMUNE

Exercice 1. *(Questions de cours)*

1. On note $\mathbf{U} = \{z \in \mathbf{C}, |z| = 1\}$. Montrer que si $z \in \mathbf{U}$, alors $\overline{z} = \frac{1}{z}$.
2. Donner la division euclidienne de 2729 par 21.

Réponse. 1. Soit $z \in \mathbf{C}$. Si $|z| = 1$, alors il existe $\theta \in \mathbf{R}$ tel que $z = e^{i\theta}$. Alors $\overline{z} = e^{-i\theta} = 1/z$.
2. $2729 = 129 \times 21 + 20$.

□

Exercice 2.

1. À l'aide d'un taux d'accroissement, montrer que $\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x + o(x)$.
2. Établir la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ définie, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, par

$$u_n = \left(1 + \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n.$$

Réponse. 1. La fonction sin est dérivable en 0, et $\sin'(0) = \cos(0) = 1$. Par conséquent,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1,$$

et donc $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$, ou encore $\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x + o(x)$.

2. Lorsque $n \to +\infty$, on a : $\sin(1/n) = 1/n + o(1/n)$ d'après la question précédente. Par conséquent,

$$\begin{aligned} u_n = \left(1 + \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n &= \exp\left[n \ln\left(1 + \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right] \\ &\underset{n\to+\infty}{=} \exp\left[n \ln\left(1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right] \end{aligned}$$

Or, $\ln(1 + x) \underset{x\to 0}{=} x + o(x)$, et donc

$$\begin{aligned} u_n &\underset{n\to+\infty}{=} \exp\left[n\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right] \\ &\underset{n\to+\infty}{=} \exp[1 + o(1)] \end{aligned}$$

d'où finalement $\lim_{n\to+\infty} u_n = e$.

□

Exercice 3. Montrer que
$$\sum_{k=0}^{n} k! \underset{n\to\infty}{\sim} n!.$$

Réponse. Soit $n \geqslant 2$. On sépare la somme en trois termes :
$$\frac{\sum_{k=0}^{n} k!}{n!} = 1 + \frac{(n-1)!}{n!} + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{k!}{n!}.$$
Maintenant, on remarque que, d'une part,
$$\frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$
et d'autre part,
$$0 \leqslant \sum_{k=0}^{n-2} \frac{k!}{n!} \leqslant (n-1)\frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n},$$
donc le théorème des gendarmes permet de conclure que
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} k!}{n!} = 1,$$
ce qui répond à la question. □

Problème

Dans les trois exercices suivants, on se place dans le plan euclidien qu'on identifie à $\mathbf{C}$. Les trois exercices sont indépendants les uns des autres ; on pourra admettre les résultats de l'un pour résoudre l'autre.

Exercice 4. *(Questions préliminaires).* Soient a, b et z des complexes.

1. Soit r la rotation de centre O et d'angle $\theta \in \mathbf{R}$. Exprimer $\overline{r(a)} \times r(b)$ en fonction de a et b.
2. Soit t la translation de vecteur $-z$. Exprimer $\overline{t(a)} \times t(b)$ en fonction de a, b et z.

Réponse. Dans $\mathbf{C}$, la rotation de centre O et d'angle θ s'écrit : $r : y \mapsto e^{i\theta}y$, et la translation de vecteur $-z$ s'écrit $t : y \mapsto y - z$, donc
$$\overline{r(a)}r(b) = \overline{e^{i\theta}a}e^{i\theta}b = e^{-i\theta}\overline{a}e^{i\theta}b = \overline{a}b,$$
et
$$\overline{t(a)}t(b) = (\overline{a-z})(b-z).$$
□

Exercice 5. Le but de cet exercice est de déterminer l'aire d'un triangle en fonction des affixes de ses sommets. Plus précisément, si M, A et B sont trois points quelconques d'affixes respectives z, a et b, tels que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \in]0, \pi[$, on va montrer que

$$\text{Aire}(MAB) = \frac{1}{2}\,\text{Im}\left(\overline{(a-z)}(b-z)\right).$$

On le fait étape par étape.

1. Montrer que la formule est vraie lorsque M est l'origine O, A est situé sur le demi-axe des abscisses positives et B est quelconque. On rappelle que l'aire d'un triangle est égale à la moitié du produit d'une base et de la hauteur correspondante.
2. En déduire que la formule est vraie lorsque M est l'origine et A, B quelconques. *(Indication : la rotation de centre O et d'angle $-\text{Arg}(a)$ préserve l'aire du triangle et permet de se ramener à la question* (a).*)*
3. En déduire que la formule est vraie avec M, A et B quelconques. (*Indication : utiliser une translation pour se ramener à la question* (b).*)*

Réponse. 1. On suppose que $M = O$ et que A est sur le demi-axe des abscisses positives. Dans ce cas, on peut choisir pour base du triangle OAB le segment $[OA]$, et la mesure de la hauteur correspondante est simplement l'ordonnée de B. Avec les nombres complexes, on en déduit que

$$\text{Aire}(OAB) = \frac{1}{2} a\,\text{Im}(b) = \frac{1}{2}\,\text{Im}(\overline{a}b)$$

car $a \in \mathbf{R}$.

2. On suppose maintenant seulement que $M = O$. Soit θ un argument de a. On note A' et B' les images respectives de A et B par la rotation r de centre O et d'angle $-\theta$. Par construction, A' est sur le demi-axe des abscisses positives. De plus, l'image du triangle OAB par r est le triangle $OA'B'$, et ces deux triangles ont donc la même aire. On déduit de la question 1. que

$$\text{Aire}(OAB) = \text{Aire}(OA'B') = \frac{1}{2}\,\text{Im}\Big(\overline{r(a)}r(b)\Big),$$

et l'exercice précédent permet donc de conclure que

$$\text{Aire}(OAB) = \frac{1}{2}\,\text{Im}(\overline{a}b).$$

3. On ne suppose plus que $M = O$. Soit t la translation de vecteur qui envoit M sur O. Avec les affixes, c'est la translation de vecteur $-z$. L'image par t du triangle MAB est donc le triangle $OA''B''$, où on a appelé A'' et B'' les images de A et B par t. Comme, à nouveau, t préserve l'aire, la question 2. et l'exercice précédent permettent de conclure que

$$\text{Aire}(MAB) = \text{Aire}(OA''B'') = \frac{1}{2}\,\text{Im}\Big(\overline{t(a)}t(b)\Big) = \frac{1}{2}\,\text{Im}\left(\overline{(a-z)}(b-z)\right).$$

$\square$

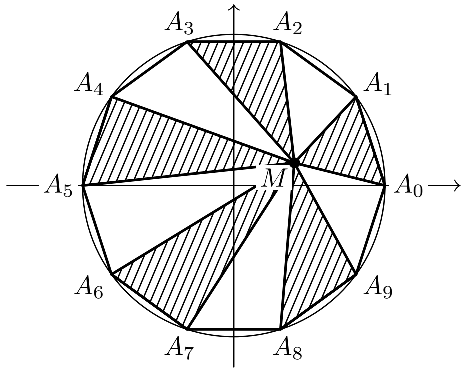

FIGURE 1 – Un exemple de découpage du décagone.

Exercice 6. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère maintenant un polygone régulier à $2n$ côtés, de sommets $A_0, A_1, \ldots, A_{2n-1}$ situés sur le cercle trigonométrique, avec A_0 d'affixe 1.

On considère un point M situé à l'intérieur du polygone. On hachure un triangle MA_kA_{k+1} sur deux, avec la convention que $A_{2n} = A_0$. Le but de cet exercice est de montrer que l'aire du domaine hachuré est égale à l'aire du domaine non hachuré.

1. Exprimer en fonction de $\omega = e^{i\pi/n}$ les affixes des points $A_0, A_1, \ldots, A_{2n-1}$.
2. On pose $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k(\overline{\omega}^k - \overline{z})(\omega^{k+1} - z)$. Montrer que

$$S = \omega \left(\sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k \right) - z \left(\sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k \overline{\omega}^k \right) - \overline{z} \left(\sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k \omega^{k+1} \right) + |z|^2 \left(\sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k \right).$$

3. Montrer que chacune des quatre sommes qui apparaissent dans cette expression de S est nulle.
4. Conclure quant à l'égalité des aires.

Réponse. 1. Soit k un entier entre 0 et $2n-1$. L'angle A_0OA_k mesure $k \times \frac{2\pi}{2n}$, et A_k est sur le cercle unité. Par conséquent, l'affixe de A_k est

$$e^{ik\frac{\pi}{n}} = \omega^k.$$

2. On développe le produit à l'intérieur de la somme : soit $k \in [\![0, 2n-1]\!]$, alors

$$(\overline{\omega}^k - \overline{z})(\omega^{k+1} - z) = \overline{\omega}^k\omega^{k+1} - z\overline{\omega}^k - \overline{z}\omega^{k+1} + z\overline{z}.$$

Or, d'après l'exercice 1, et comme $|\omega| = 1$, $\overline{\omega} = 1/\omega$, donc

$$(\overline{\omega}^k - \overline{z})(\omega^{k+1} - z) = \omega - z\overline{\omega}^k - \overline{z}\omega^{k+1} + |z|^2.$$

On obtient donc immédiatement, en sommant sur k et en factorisant par les termes indépendants de k, que

$$S = \omega \left(\sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k \right) - z \left(\sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k \overline{\omega}^k \right) - \overline{z} \left(\sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k \omega^{k+1} \right) + |z|^2 \left(\sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k \right).$$

3. Les quatres sommes qui apparaissent dans S sont des sommes géométriques. Commençons par montrer que la première (et la quatrième) est nulle.

$$\sum_{k=0}^{2n-1}(-1)^k = \frac{1-(-1)^{2n}}{1-(-1)} = 0.$$

Pour les deux autres sommes, on va utiliser le fait que $\omega^{2n}=1$:

$$\sum_{k=0}^{2n-1}(-1)^k\overline{\omega}^k = \frac{1-(-\overline{\omega})^{2n}}{1-(-\overline{\omega})} = \frac{1-\overline{\omega^{2n}}}{1+\overline{\omega}} = 0,$$

et

$$\sum_{k=0}^{2n-1}(-1)^k\omega^{k+1} = \omega\frac{1-(-\omega)^{2n}}{1+\omega} = 0.$$

Par conséquence, $S=0$.

4. L'exercice 5 permet de calculer les aires concernées. Soit D_h le domaine hachuré, et D_b le domaine laissé blanc. On obtient :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Aire}(D_h) &= \mathrm{Aire}(MA_0A_1) + \mathrm{Aire}(MA_2A_3) + \cdots + \mathrm{Aire}(MA_{2n-2}A_{2n-1}) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{Aire}(MA_{2k}A_{2k+1}) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\Big(\overline{(\omega^{2k}-z)}(\omega^{2k+1}-z)\Big) \\
&= \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{n-1}(\overline{\omega}^{2k}-\overline{z})(\omega^{2k+1}-z)\right),
\end{aligned}$$

et, de la même manière,

$$\mathrm{Aire}(D_b) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{n-1}(\overline{\omega}^{2k+1}-\overline{z})(\omega^{2k+2}-z)\right).$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
\mathrm{Aire}(D_h) - \mathrm{Aire}(D_b) &= \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{n-1}(\overline{\omega}^{2k}-\overline{z})(\omega^{2k+1}-z) - \sum_{k=0}^{n-1}(\overline{\omega}^{2k+1}-\overline{z})(\omega^{2k+2}-z)\right) \\
&= \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{2n-1}(-1)^k(\overline{\omega}^{k}-\overline{z})(\omega^{k+1}-z)\right) \\
&= \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}(S) = 0,
\end{aligned}$$

et donc $\mathrm{Aire}(D_h) = \mathrm{Aire}(D_b)$.

$\square$