Fondamentaux des mathématiques - DS n°3
Partie CUPGE

Exercice 1 : On rappelle que $\mathbb{U}$ est le cercle unitaire des complexes de module 1. Montrer que pour $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{U}$ on a $\dfrac{(a_1+a_2)\cdots(a_{n-1}+a_n)(a_n+a_1)}{a_1a_2\cdots a_n} \in \mathbb{R}$.

Solution. On note que pour $a = e^{i\phi} \in \mathbb{U}$ on a $\dfrac{1}{a} = e^{-i\phi} = \bar{a}$. Ainsi $a + \dfrac{1}{a} = a + \bar{a} = 2\operatorname{Re} a \in \mathbb{R}$. Donc pour $a, b \in \mathbb{U}$ on a $\dfrac{a}{b} \in \mathbb{U}$ et $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} \in \mathbb{R}$.

Soient $\alpha_i \in \mathbb{U}$ avec $\alpha_i^2 = a_i$. Alors

$$\begin{aligned}\frac{(a_1+a_2)\cdots(a_{n-1}+a_n)(a_n+a_1)}{a_1a_2\cdots a_n} &= \frac{a_1+a_2}{\alpha_1\alpha_2}\cdots\frac{a_{n-1}+a_n}{\alpha_{n-1}\alpha_n}\cdot\frac{a_n+a_1}{\alpha_n\alpha_1} \\ &= \Big(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}+\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\Big)\cdots\Big(\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}+\frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}}\Big)\Big(\frac{\alpha_n}{\alpha_1}+\frac{\alpha_1}{\alpha_n}\Big) \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Exercice 2 : Résoudre l'équation $z^2 + (4-3i)z = 2 + 8i$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Solution. On a

$$\Delta = (4-3i)^2 - 4(-2-8i) = 16 - 9 - 24i + 8 + 32i = 15 + 8i.$$

Si $\delta = a + ib$ et $\delta^2 = \Delta$, on a $a^2 - b^2 = 15$, $2ab = 8$, et

$$a^2 + b^2 = |\Delta| = \sqrt{15^2 + 8^2} = \sqrt{225 + 64} = \sqrt{289} = 17.$$

Ainsi $2a^2 = 32$ et $a = \pm 4$, $b = 8/2a = \pm 1$. Donc $\delta = \pm(4 + i)$.

Enfin, les solutions sont $z = \dfrac{-4 + 3i \pm \delta}{2} \in \{2i, -4 + i\}$.

Exercice 3 : Soit $f(x) = x\, e^{\frac{2x}{x^2-1}}$. On se propose d'étudier f.

1. Donner le domaine de définition maximal D de f.
2. Montrer que $f(1/x) = 1/f(x)$ et $f(x)\,f(-x) = -x^2$ pour $x \in D$, $x \neq 0$.
3. Calculer les limites et les asymptotes de f en $\pm\infty$ (s'il y en a). [Indication : La dérivée de $g(x) = e^{\frac{2x}{1-x^2}}$ en 0 peut être utile.]
4. Étudier les limites à droite et à gauche de f aux points de $\mathbb{R} \setminus D$.
5. Calculer la dérivée de f où elle existe, et dresser le tableau de variations.
6. Dresser le graphe de f.

Solution.

1. $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$, pour que le dénominateur soit difféent de zéro.
2. Pour $x \in D$ on a $1/x \in D$ et $-x \in D$, et
$$f(\frac{1}{x}) = \frac{1}{x}\, e^{\frac{2/x}{x^{-2}-1}} = \frac{1}{x}\, e^{\frac{2x}{1-x^2}} = \frac{1}{x}\, e^{-\frac{2x}{x^2-1}} = \frac{1}{f(x)}, \quad \text{ainsi que}$$
$$f(x)f(-x) = x\, e^{\frac{2x}{x^2-1}}\,(-x)\, e^{\frac{-2x}{x^2-1}} = -x^2 e^0 = -x^2.$$
3. On a $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x\, e^{\frac{2x}{x^2-1}} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} x\, e^{\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{x-1/x}} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} x\, e^0 = \pm\infty$.

   Pour l'asymptote en $\pm\infty$ on a $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = e^{\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{x-1/x}} = e^0 = 1$, et
$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - x) = \lim_{x\to\pm\infty} x(e^{\frac{2x}{x^2-1}} - 1) = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\frac{2/x}{x^{-2}-1}} - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\frac{2x}{1-x^2}} - e^0}{x - 0} = g'(0),$$
   où $g(x) = e^{\frac{2x}{1-x^2}}$. Alors $g'(x) = e^{\frac{2x}{1-x^2}} \dfrac{2(1-x^2) + 4x^2}{(1-x^2)^2}$ et $g'(0) = 2$. L'asymptote en $\pm\infty$ est donc $y = x + 2$.

4. (a) $\lim_{x\to 1^+} x\, e^{\frac{2x}{x^2-1}} = 1\, e^{\lim_{x\to 1^+} \frac{2x}{x^2-1}} = e^{\lim_{y\to\infty} y} = \infty$,
   (b) $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(1/x) = 1/\lim_{x\to 1^+} f(x) = 0$,
   (c) $\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(-x) = \lim_{x\to 1^-} -x^2/f(x) = \lim_{x\to 1^+} -x^2 f(x) = -\infty$, et
   (d) $\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(1/x) = 1/\lim_{x\to -1^+} f(x) = 0$.

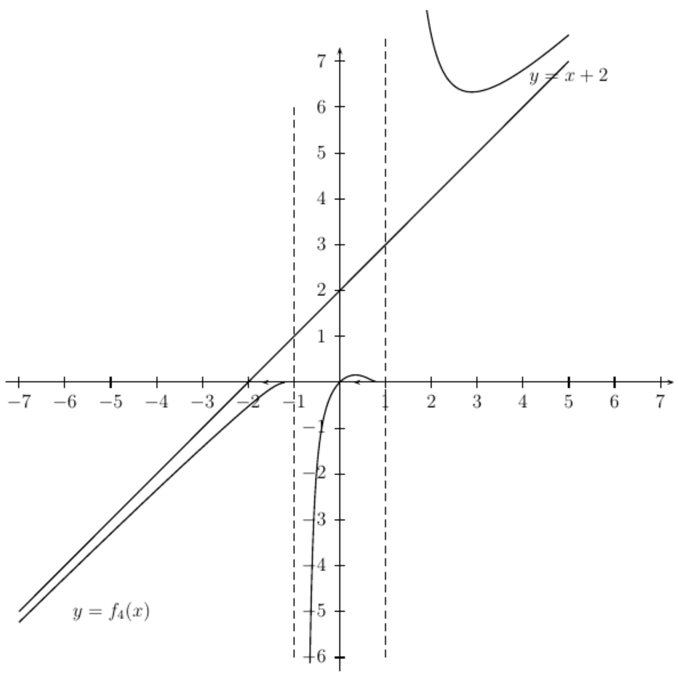
5. $f'(x) = e^{\frac{2x}{x^2-1}} + x\, e^{\frac{2x}{x^2-1}} \dfrac{2(x^2-1)-4x^2}{(x^2-1)^2} = e^{\frac{2x}{x^2-1}} \dfrac{(x^2-1)^2 - 2x - 2x^3}{(x^2-1)^2}$. Le signe de $f'(x)$ est donc celui de

$$x^4 - 2x^2 + 1 - 2x - 2x^3 = (x^2 - x + 1)^2 - 5x^2 = (x^2 - (1-\sqrt{5})x + 1)(x^2 - (1+\sqrt{5})x + 1).$$

Le premier facteur a un dicriminant $(1-\sqrt{5})^2 - 4 = 2 - 2\sqrt{5} < 0$ et donc pas de racine réelle ; le deuxième a un discriminant $(1+\sqrt{5})^2 - 4 = 2 + 2\sqrt{5} > 0$ et donc deux racines $\alpha = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}+\sqrt{2+2\sqrt{5}})$ et $\beta\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}-\sqrt{2+2\sqrt{5}})$.

x	$-\infty$			-1			β			1			α		∞
$f'(x)$		$+$		|		$+$	0	$-$		|		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	|	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\beta)$	$\searrow$	0	|	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	∞

6.



Exercice 4 : Pour tout $n \in \mathbb{N}^\times$, on pose $u_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln n$ et $v_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln(n+1)$.

1. Montrer que les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes.
   En déduire qu'elles admettent une limite γ. Elle s'appelle la *constante d'Euler*.
2. En déduire la valeur de $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$.

Solution.

1. On a

$$u_n - v_n = ln(n+1) - \ln n = \int_n^{n+1} \frac{dt}{t} \le \frac{1}{n} \to 0 \qquad \text{pour } n \to \infty.$$

De plus,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n = \int_n^{n+1} \Big(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{t}\Big) dt < 0$$

et

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+2) + \ln(n+1) = \int_{n+1}^{n+2} \Big(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{t}\Big) dt > 0.$$

Ainsi $(u_n)_n$ est décroissant et $(v_n)_n$ est croissant, et les deux suites sont adjacentes. D'après le théorème des suites adjacentres, les deux limites $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ et $\lim\limits_{n\to\infty} v_n$ existent et sont égales à une valeur qu'on appelera γ.

2.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} = 2\sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{1}{2k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \Big(\Big(\sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{1}{k}\Big) - \ln\lfloor \frac{n}{2} \rfloor\Big) - \Big(\Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\Big) - \ln n\Big) + \Big(\ln\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - \ln n\Big)$$

$$\to \gamma - \gamma + \lim_{n\to\infty} \Big(\ln\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - \ln \frac{n}{2} - \ln 2\Big) = -\ln 2 + \lim_{n\to\infty} \ln \frac{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{\frac{n}{2}} = -\ln 2$$

pour $n \to \infty$, puisque $\dfrac{n-1}{2} \le \lfloor \dfrac{n}{2} \rfloor \le \dfrac{n}{2}$, et donc

$$\lim_{n\to\infty} \ln \frac{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{\frac{n}{2}} = \ln \lim_{n\to\infty} \frac{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{\frac{n}{2}} = \ln 1 = 0.$$

<u>Exercice 5 :</u> Soit A une partie non vide bornée de $\mathbb{R}$. Montrer l'égalité

$$\sup\{|x-y| : x, y \in A\} = \sup A - \inf A.$$

Solution. Trivialement, pour $a, b \in A$ on a $|a-b| \le \sup A - \inf A$, d'où

$$\sup\{|x-y| : x, y \in A\} \le \sup A - \inf A.$$

Réciproquement, soit $\epsilon > 0$, et $a, b \in A$ avec $\sup A - \epsilon/2 \le a \le \sup A$ et $\inf A \le b \le \inf A + \epsilon/2$. Alors

$$\sup A - \inf A - \epsilon \le a - b \le \sup\{|x-y| : x, y \in A\}.$$

Ainsi on a égalité.