Université Claude Bernard Lyon 1 Semestre automne 2019 - 2020
Cursus prépa - Première année

Fondamentaux des mathématiques - DS n°3
PARTIE COMMUNE

L'étudiant attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Il veillera à justifier soigneusement toutes ses réponses. Si un étudiant est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
Les exercices sont indépendants et peuvent donc être traités dans n'importe quel ordre. Au cours d'un exercice, lorsqu'un étudiant ne peut répondre à une question, il lui est vivement recommandé de poursuivre en admettant le résultat qui lui était demandé de démontrer.

Durée : *1h30. Les calculatrices ne sont* ***pas autorisées****.*

Exercice 1 : *Questions de cours*

1. Montrer qu'une suite convergente est bornée.
   Solution : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente ; notons ℓ sa limite. Par définition, il existe $N \in \mathbb{N}$ telle que $|u_n - \ell| < 1$ pour tout $n \geq N$ (ce qui peut se réécrire $\ell - 1 < u_n < \ell + 1$). Notons alors $A_N := \{u_0, \cdots, u_{N-1}\}$ l'ensemble constitué des N premiers éléments de la suite (u_n). Il en résulte que (u_n) est minorée par $m := \min(\min(A_N), \ell - 1)$ et majorée par $M := \max(\max(A_N), \ell + 1)$.
2. On considère une suite (u_n) définie par une relation de récurrrence de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, où f est une fonction réelle continue. Montrer que si (u_n) converge, alors elle converge vers un point fixe de f.
   Solution : Supposons que (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$. On a $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En passant à la limite dans l'égalité précédente, on a $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n)$. La fonction f étant continue, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f\left(\lim\limits_{n\to+\infty} u_n\right) = f(\ell)$, d'où le résultat.
3. Montrer que pour tous nombres complexes z_1, z_2, on a : $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + 2Re(z_1\bar{z}_2) + |z_2|^2$.
   Solution :
   $$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)\left(\overline{z_1 + z_2}\right) = z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + \underbrace{z_2\overline{z_1}}_{\overline{z_1\overline{z_2}}} + z_2\overline{z_2} = |z_1|^2 + 2Re(z_1\bar{z}_2) + |z_2|^2\,.$$

Exercice 2 : Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. Montrer que $|z| = 1$ si et seulement si $\dfrac{1+z}{1-z}$ est imaginaire pur.

Solution :
$$\frac{1+z}{1-z} = \frac{(1+z)(\overline{1-z})}{|1-z|^2} = \frac{1+z-\overline{z}-z\overline{z}}{|1-z|^2} = \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2} + 2i\frac{Im(z)}{|1-z|^2}\,.$$
On obtient alors immédiatement $Re\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right) = 0 \Leftrightarrow |z|^2 = 1$.

Exercice 3 : On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_{n+1} = e^{u_n} - 2\,,\ \forall n \geq 0 \\ u_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$

1. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^x - 2$. Etudier les variations de $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) - x$. En déduire que f admet deux points fixes a_1 et a_2 tels que $a_1 < 0 < a_2$.
   Solution : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = e^x - 2 - x$. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables, et on a $g'(x) = e^x - 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On en déduit que g est décroissante sur $]-\infty, 0]$ et croissante sur $[0, +\infty[$. D'autre part, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x) = +\infty$ et $g(0) = -1$. On en déduit l'existence de deux réels $a_1 < 0 < a_2$ tels que $g(a_1) = g(a_2) = 0$. On note alors que $g(a_{1,2}) = 0 \Leftrightarrow f(a_{1,2}) = a_{1,2}$ et donc a_1 et a_2 sont des points fixes de f.

2. Montrer par récurrence que si $u_0 \in \{a_1, a_2\}$, la suite (u_n) est stationnaire.
   Solution : Supposons par exemple $u_0 = a_1$. On a alors $u_1 = f(u_0) = f(a_1) = a_1$ car a_1 est un point fixe de f. Un raisonnement par récurrence élémentaire permet de montrer que $f(u_n) = a_1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que l'intervalle $]a_1, a_2[$ est stable par f (*on rappelle qu'un intervalle I est stable par f si $f(I) \subset I$*).
   Solution : On a $f(a_1) = a_1$ et $f(a_2) = a_2$. f étant croissante sur cet intervalle, on a $f(x) > a_1$ et $f(x) < a_2$ pour tout $x \in]a_1, a_2[$, ce qui permet de conclure.
4. Montrer que si $u_0 \in]a_1, a_2[$, alors (u_n) converge vers un réel que l'on précisera.
   Solution : Soit $u_0 \in]a_1, a_2[$. L'intervalle $]a_1, a_2[$ étant stable par f, on a $u_1 = f(u_0) \in]a_1, a_2[$. Une récurrence immédiate permet d'établir que $u_n \in]a_1, a_2[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On en déduit que (u_n) est bornée. De plus, pour tout $x \in]a_1, a_2[$, on a $g(x) < 0$, c'est à dire $f(x) < x$. On en déduit que $u_{n+1} = f(u_n) < u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et la suite (u_n) est donc décroissante. Etant minorée (par a_1), elle converge.
   On sait (*question de cours*) que si (u_n) converge, elle converge vers un point fixe de f. Il n'y a donc que deux possibilités : a_1 ou a_2. Or, nous avons vu que $f(u_n) \leq u_0 < a_2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui proscrit une convergence vers a_2. On en déduit que (u_n) converge vers a_1.
5. Etudier la convergence de (u_n) dans les cas $u_0 \in]-\infty, a_1[$ et $u_0 \in]a_2, +\infty[$.
   Solution : Soit $u_0 \in]-\infty, a_1[$. Un raisonnement similaire au précédent montre que cet intervalle est stable par f. De plus, pour tout $x \in]-\infty, a_1[$ on a $g(x) > 0$, c'est à dire $f(x) > x$. On déduit de ceci que la suite (u_n) est croissante et majorée (par a_1). Elle converge donc vers un point fixe de f, qui ne peut être que a_1.
   Considérons enfin le cas $u_0 \in]a_2, +\infty[$. Par un raisonnement analogue on montre que (u_n) est alors croissante. Si elle était majorée, elle convergerait (vers un point fixe de f, donc a_1 ou a_2). Mais ceci ne peut se produire car $a_1 < a_2 < u_0 \leq f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, (u_n) est croissante et non majorée, donc elle diverge vers $+\infty$.

Exercice 4 :

1. Soit A et B deux ensembles de cardinal fini et $f : A \longrightarrow B$ bijective. Montrer que $Card(A) = Card(B)$.
   Solution : Notons $n = Card(A)$ et $m = Card(B)$. On pose $A = \{a_1, \cdots, a_n\}$.
   On a $f(A) = \{f(a_1), \cdots, f(a_n)\} \subset B$. Or, f étant bijective, elle est donc injective et $f(A)$ contient n éléments (les $f(a_i)$ sont tous distincts). On en déduit que $m \geq n$. De même, en raisonnant sur la fonction réciproque de f, on a $n \geq m$, d'où l'on tire l'égalité $Card(A) = Card(B)$.

Soit E un ensemble non vide de cardinal fini $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. On considère a un élément de E, et l'application suivante :

$$\begin{array}{cccc} \varphi : & \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ & X & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{l} X \cup \{a\} \text{ si } a \notin X \\ X \setminus \{a\} \text{ si } a \in X \end{array} \right. \end{array}$$

2. Soit $X \in \mathcal{P}(E)$. Déterminer $\varphi \circ \varphi(X)$.
   Solution : Si $a \in X$, alors $\varphi(X) = X \setminus \{a\}$. Par suite, $a \notin \varphi(X)$ par construction, et donc $\varphi(\varphi(X)) = \varphi(X) \cup \{a\} = (X \setminus \{a\}) \cup \{a\} = X$. Un raisonnement analogue permet d'établir que $\varphi(\varphi(X)) = X$ dans le cas où $a \notin X$.
3. En déduire que φ est bijective et déterminer son inverse.
   Solution : On déduit de ce qui précède que φ est bijective, de réciproque $\varphi^{-1} = \varphi$.

On note à présent $\mathbb{P}$ le sous-ensemble de $\mathcal{P}(E)$ constitué des parties de E ayant un cardinal pair et $\mathbb{I}$ celui constitué des parties de E de cardinal impair.

4. Montrer que $\varphi(\mathbb{P}) = \mathbb{I}$.
   Solution : Soit $X \in \mathbb{P}$. On a donc $Card(X) = 2p$ avec $p \in \mathbb{N}$. En revenant à la définition de φ, on a immédiatement $Card(\varphi(X)) = 2p - 1$ si $a \in X$ (en effet, si $a \in X$, on retire cet élément), ou $Card(\varphi(X)) = 2p + 1$ si $a \notin X$ (si $a \notin X$, on rajoute cet élément). Dans tous les cas, le cardinal de $\varphi(X)$ est impair, c'est à dire $\varphi(X) \in \mathbb{I}$. On a donc l'inclusion $\varphi(\mathbb{P}) \subset \mathbb{I}$. Il

reste à établir l'inclusion réciproque.
Considérons donc $Y \in \mathbb{I}$, et posons $X = \varphi(Y)$. Par un raisonnement similaire au précédent, $X \in \mathbb{P}$, et on a $\varphi(X) = \varphi \circ \varphi(Y) = Y$, ce qui signifie que $Y \in \varphi(\mathbb{P})$. Par suite, $\mathbb{I} \subset \varphi(\mathbb{P})$ et on a l'égalité demandée.

5. En déduire que $\displaystyle\sum_{\substack{q \in \mathbb{N} \\ 2q \leq n}} \binom{n}{2q} = \sum_{\substack{q \in \mathbb{N} \\ 2q+1 \leq n}} \binom{n}{2q+1}$.

   Solution : Rappelons d'abord que pour tout entier $p \leq n$, la quantité $\binom{n}{p}$ représente le nombre de parties à p éléments de E. Le cardinal de $\mathbb{P}$, qui correspond au nombre de parties de E contenant un nombre pair d'éléments, est donc donné par la quantité $\displaystyle\sum_{\substack{q \in \mathbb{N} \\ 2q \leq n}} \binom{n}{2q}$, et pour des raisons similaires le cardinal de $\mathbb{I}$ est égal à $\displaystyle\sum_{\substack{q \in \mathbb{N} \\ 2q+1 \leq n}} \binom{n}{2q+1}$. D'après la question 1, φ étant bijective, on a $Card(\mathbb{P}) = Card(\mathbb{I})$, ce qui donne le résultat demandé.