Université Claude Bernard Lyon 1 Semestre automne 2019 - 2020
Cursus prépa - Première année

Fondamentaux des mathématiques - DS n°2
PARTIE COMMUNE

On attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. On veillera à justifier soigneusement toutes ses réponses. Si on repère ce qui semble être une erreur d'énoncé, on le signalera sur sa copie et poursuivra la composition, en expliquant les raisons de cette initiative.

Les exercices sont indépendants et peuvent donc être traités dans n'importe quel ordre. Au cours d'un exercice, lorsqu'on ne peut pas répondre à une question, il est vivement recommandé de poursuivre en admettant le résultat que la question demandait de démontrer.

Durée : *1h30. Les calculatrices ne sont* ***pas autorisées****. Ce sujet comprend* ***une page****.*

Exercice 1.

a) Soient E et F deux ensembles et f une fonction de E dans F. Pour $A \in \mathcal{P}(E)$ et $B \in \mathcal{P}(F)$ rappelez la définition de $f[A]$ et de $f^{-1}[B]$.

b) Montrer que pour A et B dans $\mathcal{P}(E)$ on a $(A \cup B) \subseteq (A \cap B) \Leftrightarrow A = B$

c) Pour $A \in \mathcal{P}(E)$ on pose $f : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ définit si $X \in \mathcal{P}(E)$ par $f(X) = X \cap A$. Montrer que f est surjective si et seulement si $A = E$

Exercice 2. Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^6 - x - \ln(x)$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x \ln(x) - e^{\sqrt{x}} x^7$ c) $\lim\limits_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$

Exercice 3. Soient P, Q et R trois propositions. Montrer que la proposition $(P \Rightarrow Q)$ et $(Q \Rightarrow R)$ est équivalente à la proposition $(P \text{ ou } Q) \Leftrightarrow (Q \text{ et } R)$

Exercice 4. Pour les fonctions suivantes déterminer si elles sont injectives et si elles sont surjectives et le justifier :

$$f : \begin{array}{l} \mathbf{R} \to \mathbf{R} \\ x \mapsto \arctan(e^x - e^{-x}) \end{array} \qquad g : \begin{array}{l} \mathbf{Z} \times \mathbf{N}^* \to \mathbf{Q} \\ (a,b) \mapsto \dfrac{a}{b} \end{array} \qquad h : \begin{array}{l} \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2 \\ (x,y) \mapsto (x+y, x-y) \end{array}$$

Exercice 5. Soit f la fonction défini par $x \mapsto \arcsin(2x^2 - 1)$.

a) Déterminer le domaine maximal de définition de f ainsi que sa parité.

b) Montrer que f est dérivable sur $]-1, 1[\setminus \{0\}$ et y calculer sa dérivée. Dresser son tableau de variation.

c) Que peut on dire de la fonction $f - 2\arcsin$ sur $[0, 1]$? En déduire une expression de f sur $[-1, 1]$.

d) Tracer le graphe de f.

e) Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x}$ et $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x}$. La fonction f est-elle dérivable en zero ?