Fondamentaux des mathématiques - DS n°1
Partie CUPGE

Exercice 1 : On cherche à étudier la fonction réelle $f(x) = x + \sqrt{|x^2-1|}$.

1. Donner son domaine maximal de définition. La fonction f est-elle continue ?
2. Chercher le domaine maximal où f est dérivable. Calculer sa dérivée.
3. Calculer les limites en $\pm\infty$ et établir le tableau des variations de f. En déduire $\operatorname{im} f$.
4. Chercher les asymptotes éventuelles de f.
5. Tracer le graphe de f.

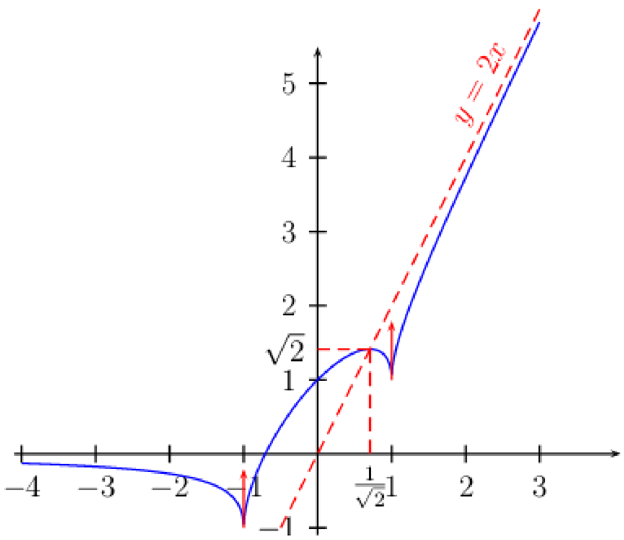
Solution.

1. $|x^2+1| \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Le domaine maximal de définition est donc $\mathbb{R}$. En tant que composition de fonctions continues, f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Pour $x \neq \pm 1$ on a
$$f'(x) = 1 + \frac{1}{2}|x^2-1|^{-\frac{1}{2}} 2x \operatorname{sgn}(x^2-1) = 1 + \frac{x}{\sqrt{|x^2-1|}} \operatorname{sgn}(x^2-1).$$
Pour $x_0 = 1$ on a
$$\lim_{x\to 1^\pm} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^\pm} \frac{x+\sqrt{|x^2-1|}-1}{x-1} = 1 + \lim_{x\to 1^\pm} \sqrt{\left|\frac{x+1}{x-1}\right|} \operatorname{sgn}(x-1) \to \pm\infty.$$
Pour $x_0 = -1$ on a
$$\lim_{x\to -1^\pm} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = \lim_{x\to -1^\pm} \frac{x+\sqrt{|x^2-1|}+1}{x+1} = 1 + \lim_{x\to -1^\pm} \sqrt{\left|\frac{x-1}{x+1}\right|} \operatorname{sgn}(x+1) \to \pm\infty.$$
Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}$.
3. On a $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ et
$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} x + \sqrt{x^2-1} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2-(x^2-1)}{x-\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x-\sqrt{x^2-1} =} 0.$$
Ensuite, on a $\lim\limits_{x\to -\infty} f'(x) = 1-1 = 0$ et $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = 1+1 = 2$.
De plus, pour $x \neq \pm 1$ on a $f'(x) = 0$ ssi $-\sqrt{|x^2-1|} = x\operatorname{sgn}(x^2-1)$ ssi $x \in]-\infty,-1[\cup]0,1[$ et $|x^2-1| = x^2$ ssi $x \in]-\infty,-1[\cup]0,1[$ et $x^2 = 1-x^2$ (puisque $x^2 = x^2-1$ n'a pas de solution) ssi $x \in]-\infty,-1[\cup]0,1[$ et $x^2 = \frac{1}{2}$ ssi $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Puisque f' est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}$ en tant que composition de fonctions continues, il n'y a pas d'autres changements de signes, et f' est négatif sur $]-\infty,-1[\cup]\frac{1}{\sqrt{2}},1[$ et positif sur $]-1,\frac{1}{\sqrt{2}}[\cup]1,\infty[$. Comme $f(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{1-\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$, on obtient

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		1		∞
$f'(x)$	0	$-$	$-\infty \mid \infty$	$+$	0	$-$	$-\infty \mid \infty$	$+$	2
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	1	$\nearrow$	∞

Ainsi $\operatorname{im}(f) = [-1,\infty[$.
4. On a une asymptote $y = 0$ en $-\infty$. En ∞ on a
$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} 1 + \sqrt{1-\frac{1}{x^2}} = 2$$
et
$$\lim_{x\to\infty} (f(x)-2x) = \lim_{x\to\infty} -x + \sqrt{|x^2-1|} = \lim_{x\to\infty} \frac{(x^2-1)-x^2}{\sqrt{|x^1-1|}+x^2} = 0.$$
On a donc une asymptote $y = 2x$ en ∞.

5.



Exercice 2 : Soient P, Q et R trois propositions. Montrer que la proposition suivante est vraie :

$$(P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R)).$$

Solution. Soit S cette proposition. Alors

P	Q	R	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow R$	$P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$	$P \Rightarrow R$	$(P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$	S
F	F	F	V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	F	F	V
F	V	F	V	F	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	V	V	V	V	V	V	V

Ainsi la proposition S est toujours vraie.

Exercice 3 : On définit une suite $(u_n)_{n\geq 1}$ par $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = 1 + \dfrac{n}{u_n}$ pour tout $n \geq 1$. Montrer que $\sqrt{n} < u_n < \sqrt{n} + 1$ pour tout $n \geq 2$.

Solution. Par récurrence.
Initialisation. Pour $n = 2$ on a $\sqrt{2} < 2 = 1 + \dfrac{1}{1} = 1 + \dfrac{1}{u_1} = u_2 < 1 + \sqrt{2}$.
Hérédité. Supposons $\sqrt{n} < u_n < 1 + \sqrt{n}$. Alors

$$u_{n+1} = 1 + \frac{n}{u_n} < 1 + \frac{n}{\sqrt{n}} = 1 + \sqrt{n} < 1 + \sqrt{n+1}.$$

De l'autre coté, $u_n < 1 + \sqrt{n} < 1 + \sqrt{n+1} = \dfrac{n\,(\sqrt{n+1}+1)}{(n+1)-1} = \dfrac{n}{\sqrt{n+1}-1}$, d'où $\sqrt{n+1} < 1 + \dfrac{n}{u_n} = u_{n+1}$.
D'après le principe de la récurrence l'énoncé est donc vrai pour $n \geq 2$.

Exercice 4 : Exprimer les phrases suivantes en langage formel, puis donner leur négation (dans cette question, f désigne une fonction réelle).

1. f est strictement croissante.
2. f est une fonction constante.
3. L'équation $f(x) = 0$ a au plus deux solutions.

4. L'équation $f(x) = 0$ a exactement deux solutions.

Solution.

1. $\forall x \, \forall y \, (x < y \Rightarrow f(x) < f(y))$.
   Négation : $\exists x \, \exists y \, (x < y \wedge f(x) \geq f(y))$.
2. $\exists y \, \forall x \, f(x) = y$, ou $\forall x \, \forall y \, f(x) = f(y)$.
   Négation : $\forall y \, \exists x \, f(x) \neq y$ ou $\exists x \, \exists y \, f(x) \neq f(y)$.
3. $\exists x \, \exists y \, \forall z \, (f(z) = 0 \Rightarrow (z = x \vee z = y))$ ou $\forall x \, \forall y \, \forall z \, (f(x) = f(y) = f(z) = 0 \Rightarrow (x = y \vee y = z \vee z = x))$.
   Négation :$\forall x \, \forall y \, \exists z \, (x \neq z \neq y \wedge f(z) = 0)$.
4. $\exists x \, \exists y \, (x \neq y \wedge f(x) = f(y) = 0 \wedge \forall z \, (f(z) = 0 \Rightarrow (z = x \vee z = y)))$.
   Négation :$\forall x \forall y \, (f(x) = f(y) = 0 \Rightarrow (x = y \vee \exists z \, x \neq z \neq y \wedge f(z) = 0))$.

<u>Exercice 5 :</u> Montrer que pour tout réel x non nul, on a

$$\tanh x = \frac{2}{\tanh(2x)} - \frac{1}{\tanh x}.$$

En déduire la valeur de

$$u_n = \sum_{i=0}^{n} 2^i \tanh(2^i x)$$

pour n entier naturel et x réel non nul donnés, puis calculer la limite de u_n quand $n \to \infty$.

Solution. On a pour $x \neq 0$

$$\begin{aligned}\frac{2}{\tanh(2x)} - \frac{1}{\tanh x} &= 2\,\frac{e^{2x} + e^{-2x}}{e^{2x} - e^{-2x}} - \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{2e^{2x} + 2e^{-2x} - (e^x + e^{-x})^2}{(e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x})} \\ &= \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2}{(e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x})} = \frac{(e^x - e^{-x})^2}{(e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x})} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \tanh x.\end{aligned}$$

Ainsi on obtient une somme téléscopique, et

$$\begin{aligned}u_n &= \sum_{i=0}^{n} 2^i \tanh(2^i x) = \sum_{i=0}^{n} 2^i \big(\frac{2}{\tanh(2 \cdot 2^i x)} - \frac{1}{\tanh(2^i x)}\big) = \sum_{i=0}^{n} \frac{2^{i+1}}{\tanh(2^{i+1} x)} - \sum_{i=0}^{n} \frac{2^i}{\tanh(2^i x)} \\ &= \frac{2^{n+1}}{\tanh(2^{n+1} x)} - \frac{1}{\tanh x}.\end{aligned}$$

Donc $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = \lim\limits_{n \to \infty} \big(\frac{2^{n+1}}{\tanh(2^{n+1} x)} - \frac{1}{\tanh x}\big) \to \mathrm{sgn}(x)\infty$, puisque $\lim\limits_{y \to -\infty} \tanh y = -1$ et $\lim\limits_{y \to \infty} \tanh y = 1$.