**Université Claude Bernard Lyon 1** Semestre automne 2019 - 2020
Cursus prépa - Première année

**FdM1 - Corrigé du DS n°1**

**Exercice 1 :**

*Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction. Formuler les propositions suivantes avec des quantificateurs et des connecteurs logiques :*

1. *« $f$ est constante. »*

$$\forall x \in \mathbf{R}, \forall x' \in \mathbf{R}, f(x) = f(x'), \text{ ou encore } \exists c \in \mathbf{R}, \forall x \in \mathbf{R}, f(x) = c.$$

2. *« $f$ n'est pas croissante. »*
C'est la négation de « $\forall x \in \mathbf{R}, \forall x' \in \mathbf{R}, (x \leq x' \Rightarrow f(x) \leq f(x'))$ », donc c'est

$$\exists x \in \mathbf{R}, \exists x' \in \mathbf{R}, (x \leq x' \text{ et } f(x) > f(x')),$$

puisque la négation de « $P \Rightarrow Q$ » est « $P$ et $\neg Q$ ». (Attention, il est important que la deuxième inégalité soit stricte !)

3. *« $f$ est injective. »*

$$\forall x \in \mathbf{R}, \forall x' \in \mathbf{R}, (f(x) = f(x') \Rightarrow x = x').$$

4. *« $f$ n'est pas surjective. »*
C'est la négation de « $\forall y \in \mathbf{R}, \exists x \in \mathbf{R}, f(x) = y$ », donc c'est

$$\exists y \in \mathbf{R}, \forall x \in \mathbf{R}, f(x) \neq y.$$

**Remarques :**

- Dans une telle proposition logique, il ne faut pas écrire de morceaux de phrases tels que « Soit $x \in \mathbf{R}$ », ou « on a $f(x) = y$ ». Si on a besoin d'introduire des variables, il faut le faire via des quantificateurs. Par exemple, on n'écrit pas « Soit $x \in \mathbf{R}$, $\forall x$ on a $P(x)$ », mais plutôt « $\forall x \in \mathbf{R}, P(x)$ ».
- Il ne faut pas juxtaposer des propositions logiques sans les connecter avec « ou », « et » ou encore « $\Rightarrow$ ». De même, il ne faut pas mettre de connecteur après un quantificateur, il faut directement écrire une proposition (qui dépend de la variable introduite par le quantificateur). Par exemple, on n'écrit pas « $\forall x, x' \in \mathbf{R}$ et $x \leq x'$, $f(x) \leq f(x')$ », mais plutôt « $\forall x, x' \in \mathbf{R}$, $(x \leq x' \Rightarrow f(x) \leq f(x'))$ ».
- Attention quand on utilise l'abréviation « $\forall x, x' \in \mathbf{R}$ ». Cela signifie « $\forall x \in \mathbf{R}, \forall x' \in \mathbf{R}$ », ou encore « $\forall (x, x') \in \mathbf{R}^2$ ». Attention à ne pas mettre des parenthèses là où il n'en faut pas !
- « $\exists!$ » n'est pas un quantificateur, c'est une abréviation, il ne fallait donc pas l'utiliser dans cet exercice...
- Attention, « $f$ a un antécédent » n'est pas correct. On dit plutôt, pour $y \in \mathbf{R}$, « $y$ a un antécédent $x$ par $f$ », ce qui signifie exactement « $\exists x \in \mathbf{R}, f(x) = y$ ». De plus, « $\mathrm{Im}(x)$ » n'a pas de sens. L'image d'un élément $x$ par la fonction $f$ est simplement notée « $f(x)$ ».
- Si $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, la proposition « $f$ est croissante » ne s'écrit pas « $\forall x \in \mathbf{R}, f(x) \leq f(x+1)$ » . Cela suffirait si l'ensemble de départ était $\mathbf{N}$ (par exemple pour les suites), mais ici c'est $\mathbf{R}$.

**Exercice 2 :**

*On définit la fonction $f : x \mapsto x^{-\ln(x)}$.*

1. *Pour $x > 0$ et $y \in \mathbf{R}$, rappeler la définition de $x^y$.*
Pour $x > 0$, on définit $x^y = e^{y \ln(x)}$. Cette définition est bien cohérente avec le cas où $y \in \mathbf{Z}$.

2. *Quel est le domaine de définition maximal pour $f$ ?*
   D'après la question 1), on a $f(x) = x^{-\ln(x)} = e^{-\ln(x)^2}$, qui est bien défini dès que $\ln(x)$ est défini, c'est-à-dire pour $x > 0$. Ainsi, le domaine de définition maximal de $f$ est $]0, +\infty[$.
3. Donner les limites de $f$ aux bornes de ce domaine de définition.
   On calcule la limite de $f(x) = e^{-\ln(x)^2}$ quand $x \to 0^+$ et $x \to +\infty$.
   Tout d'abord, on a
   $$\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty, \text{ donc } \lim_{x\to 0^+} -(\ln(x))^2 = -\infty, \text{ ainsi } \lim e^{-\ln(x)^2} = 0.$$
   De même,
   $$\lim_{x\to +\infty} e^{-\ln(x)^2} = 0.$$
   Ainsi, on a
   $$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 \text{ et } \lim_{x\to +\infty} f(x) = 0.$$
4. *Calculer la dérivée de $f$.*
   Tout d'abord, la fonction $f$ est bien dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$, comme composée de fonctions dérivables.
   Notons $u(x) = -\ln(x)^2$ pour $x > 0$, par composition on a
   $$u'(x) = \frac{-2\ln(x)}{x}.$$
   Or $f(x) = e^{u(x)}$ pour $x > 0$, donc par composition,
   $$f'(x) = e^{u(x)}u'(x) = \frac{-2\ln(x)}{x} e^{-\ln(x)^2}.$$
5. *Donner le tableau de variation de $f$.*
   Pour dresser le tableau de variation de $f$, on remplit d'abord le tableau de signes de $f'$. Pour cela, on note que pour tout $x > 0$, on note $\frac{2}{x}e^{-\ln(x)^2} > 0$. Ainsi, $f'(x)$ a toujours le signe de $-\ln(x)$, d'où le tableau suivant :

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | ‖ $0$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $0$ |

   On a ajouté les limites obtenues en 3), et on a bien $f(1) = e^{-\ln(1)^2} = e^0 = 1$.
6. *On définit la fonction*
   $$g : \begin{array}{ccc} [1, +\infty[ & \to & ]0, 1] \\ x & \mapsto & f(x). \end{array}$$
   *Montrer que $g$ est bijective.*
   Ici, $g$ est définie comme une restriction (au départ et à l'arrivée) de la fonction $f$. Il n'était pas demandé de vérifier si $g$ est bien définie, mais pour le voir, il faudrait vérifier deux choses : tout d'abord, $[1, +\infty[$ est bien inclus dans $\mathbf{R}_+^*$, le domaine de $f$ ; ensuite, pour tout $x \in [1, +\infty[$, on a bien $g(x) = f(x) \in ]0, 1]$. On vérifie ce deuxième point grâce au tableau de variations de $f$.
   Pour montrer que $g$ est bijective, on va montrer qu'elle est injective et surjective. Pour l'injectivité, il suffit de dire que $g$ est strictement décroissante. C'est le cas, puisque $f$ est décroissante sur $[1, +\infty[$, et que sa

dérivée ne s'annule qu'en un point ($x = 1$). Ainsi, $f$ est strictement décroissante sur $[1, +\infty[$, donc $g$ aussi, $g$ est donc bien injective.

Pour la surjectivité, on utilise le théorème des valeurs intermédiaires. En effet, on sait que $g$ est continue, comme composée de fonctions continues, et de plus on a $g(1) = 1$, et $g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$. Ainsi, par T.V.I., pour tout $y \in ]0, 1]$, il existe $x \in [1, +\infty[$ tel que $g(x) = y$, c'est-à-dire que $g$ est surjective.

On conclut bien que $g$ est bijective.

**Remarques :**

— Il ne faut pas écrire « $x^y$ est définie sur $\mathbf{R}_+^*$ », car on ne sait pas si c'est $x$ ou $y$ qui doit être dans ce domaine. On écrit donc plutôt « $x^y$ est définie pour $x > 0$ et $y \in \mathbf{R}$ », ou encore « pour $y \in \mathbf{R}$, $x \mapsto x^y$ est définie sur $R_+^*$ ».

— Si on veut donner le domaine d'une composée de deux fonctions $f$ et $g$, on n'a pas $\mathrm{Dom}(f \circ g) = \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g)$, mais

$$\mathrm{Dom}(f \circ g) = \mathrm{Dom}(g) \cap g^{-1}(\mathrm{Dom}(f)) = \{x \in \mathrm{Dom}(g), g(x) \in \mathrm{Dom}(f)\}.$$

— Pour calculer les limites dans la question 3), si on essaye de procéder par composition, il n'est pas suffisant d'écrire que

$$\lim_{x\to+\infty} -\ln(x) = -\infty \text{ et } \lim_{y\to-\infty} x^y = 0.$$

En effet la deuxième limite n'est pas vraie pour tout $x$, et quand on fait $y \to -\infty$, $x$ varie aussi. Il faut donc plutôt écrire $x^{-\ln(x)} = e^{-\ln(x)^2}$.

— Remarque similaire pour la dérivation en 4), on n'a pas de formule pour exprimer directement la dérivée de $x \mapsto x^{u(x)}$... Il ne faut pas confondre avec la dérivée de $x \mapsto e^{u(x)}$, ou de $x \mapsto x^\alpha$ où $\alpha$ est constante. On repasse donc encore par la définition : $x^{-\ln(x)} = e^{-\ln(x)^2}$.

— L'implication « si $f$ est continue, elle est dérivable » est fausse ! C'est la réciproque qui est vraie.

— La notion de bijectivité dépend **fortement** des espaces de départ et d'arrivée d'une fonction. Dans la dernière question, on définit $g$ comme une restriction de $f$, de sorte qu'elle soit à la fois injective et surjective (alors que $f$ n'est ni l'une, ni l'autre). Pour le montrer, il ne suffit pas de dire que $g$ est strictement décroissante sur son domaine $[1, +\infty[$, cela ne donne que l'injectivité. Pour prouver la surjectivité, il faut montrer que $\mathrm{Im}(g) = g([1, +\infty[)$ est égal à l'ensemble d'arrivée de $g$, qui est $]0, 1]$. Pour cela, on doit alors utiliser le théorème des valeurs intermédiaires (grâce à la continuité de $g$).

**Exercice 3 :**

*Soit $n \in \boldsymbol{N}^*$. Exprimer les sommes suivantes en fonction de $n$ :*

1. $S_1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n+1-k}\right)$.

   On peut d'abord séparer cette somme en deux :

   $$S_1 = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n+1-k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+1-k}.$$

   On peut ensuite effectuer le changement d'indice $j = n + 1 - k$ dans la seconde somme. L'indice $j$ varie alors de 1 à $n$, et on obtient :

   $$S_1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} = 0.$$

2. $S_2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$. *Indication : on pourra l'exprimer comme une somme télescopique.*

Pour obtenir une somme télescopique, il faut arriver à écrire la somme sous la forme suivante :

$$\sum_{k=1}^{n}(u_{k+1}-u_k).$$

Le résultat sera alors $u_{n+1}-u_0$, par télescopage.

En écrivant $k=k+1-1$, on obtient :

$$\begin{aligned}S_2 &= \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n}\frac{k+1-1}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k+1}{(k+1)!}-\frac{1}{(k+1)!}\right)\\ &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}\right) = 1-\frac{1}{(n+1)!} \text{ par télescopage.}\end{aligned}$$

3. $S_3=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i+j)^2$. *On rappelle que* $\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$ *et que* $\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

   On va développer le terme général de cette somme, et la découper en plusieurs sommes.

$$\begin{aligned}S_3 &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}(i^2+2ij+j^2)\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}i^2+\sum_{j=1}^{n}2ij+\sum_{j=1}^{n}j^2\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(ni^2+2i\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)\\ &= n\sum_{i=1}^{n}i^2+n(n+1)\sum_{i=1}^{n}i+\sum_{i=1}^{n}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\\ &= \frac{n^2(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n^2(n+1)^2}{2}+\frac{n^2(n+1)(2n+1)}{6}\\ &= n^2(n+1)\left(\frac{2(2n+1)+3(n+1)}{6}\right) = \frac{n^2(n+1)(7n+5)}{6}.\end{aligned}$$

**Remarques :**

— Dans la 1), pour le changement de variable $j=n-k+1$, même si on change l'ordre dans lequel les indices sont parcourus, on écrit encore « $\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}$ » et pas « $\sum_{j=n}^{1}\frac{1}{j}$ ».

— Attention aux opérations qu'on a le droit de faire avec des sommes ! On a le droit de faire des découpages du type

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k,$$

ou des factorisations du type

$$\sum_{k=1}^{n}c.b_k=c\sum_{k=1}^{n}b_k$$

si $c$ ne dépend pas de $k$. Attention aux découpages ou factorisations abusives, et attention au parenthésage pour faire moins d'erreurs.

— Il faut faire la différence entre les sommes doubles de la forme

$$\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{i,j},$$

et celles de la forme

$$\sum_{1\leq i\leq j\leq n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} a_{i,j}.$$

(Comparer l'ensemble des indices de sommations $(i,j)$ dans les deux cas.)

**Exercice 4 :**

1. *Montrer que pour* $x \in \boldsymbol{R}\backslash\{-3,-1/2,1\}$,

$$\frac{1}{x^2+2x-3} - \frac{3}{2x^2+7x+3} = \frac{4-x}{(x-1)(x+3)(2x+1)}.$$

Pour cela, on va factoriser les dénominateurs dans le terme de gauche, pour pouvoir réduire les fractions au même dénominateur. On peut par exemple le faire en calculant les racines de chaque dénominateur. Tout d'abord, $2x^2+7x+3=0$ admet deux solutions : $-3$ et $-\frac{1}{2}$. Ainsi, pour $x \in \mathbf{R}$ on a

$$2x^2+7x+3 = 2(x+3)\left(x+\frac{1}{2}\right) = (x+3)(2x+1).$$

(Attention à ne pas oublier le coefficient devant $x^2$, qui est ici 2.) De la même manière, les solutions de $x^2+2x-3=0$ sont 1 et $-3$, donc pour $x \in \mathbf{R}$ on a :

$$x^2+2x-3 = (x-1)(x+3).$$

On peut donc réduire les deux fractions au même dénominateur :

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2+2x-3} - \frac{3}{2x^2+7x+3} &= \frac{1}{(x-1)(x+3)} - \frac{3}{(x+3)(2x+1)}\\ &= \frac{2x+1-3(x-1)}{(x-1)(x+3)(2x+1)}\\ &= \frac{4-x}{(x-1)(x+3)(2x+1)},\end{aligned}$$

pour tout $x \in \mathbf{R}\backslash\{-3,-1/2,1\}$.

2. *Déterminer l'ensemble des réels $x$ tels que*

$$\frac{1}{x^2+2x-3} \geq \frac{3}{2x^2+7x+3}.$$

Utilisons le résultat de 1) : pour tout $x \in \mathbf{R}\backslash\{-3,-1/2,1\}$, on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2+2x-3} \geq \frac{3}{2x^2+7x+3} &\Leftrightarrow \frac{1}{x^2+2x-3} - \frac{3}{2x^2+7x+3} \geq 0\\ &\Leftrightarrow \frac{4-x}{(x-1)(x+3)(2x+1)} \geq 0.\end{aligned}$$

Il faut donc étudier le signe d'un quotient complètement factorisé, on va donc dresser son tableau de signes. Notons $F(x) = \frac{4-x}{(x-1)(x+3)(2x+1)}$ pour tout $x \in \mathbf{R}\backslash\{-3,-1/2,1\}$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $-\frac{1}{2}$ | | $1$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $4-x$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $x-1$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $x+3$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $2x+1$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $F(x)$ | | $-$ | $\Vert$ | $+$ | $\Vert$ | $-$ | $\Vert$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

On en déduit donc que l'ensemble des $x \in \mathbf{R}\backslash\{-3,-1/2,1\}$ vérifiant l'inégalité est $]-3,-\frac{1}{2}[\cup]1,4]$.

**Remarques :**

- Dans la question 1), on aurait pu essayer de tout développer et de montrer l'égalité par un produit en croix. C'est faisable, mais le calcul est long et lourd, et c'est facile de faire des erreurs. Il vaut donc mieux factoriser les dénominateurs, ce qu'on sait faire car ce sont des polynômes du second degré.
- Dans la deuxième question, on ne peut pas dire que l'inégalité équivaut à $2x^2+7x+3 \geq 3(x^2+2x-3)$, car pour obtenir cela, on a multiplié des deux côtés par des termes qui peuvent changer de signe. Il faut donc plutôt soustraire les deux fractions, et utiliser la question 1) pour écrire le résultat sous forme factorisée.
- Si on veut noter l'ensemble des solutions $\mathcal{S}$, il faut introduire cette notation. On écrit : « Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des $x \in \mathbf{R}$ tels que [...] », et on a alors $\mathcal{S} = ]-3,-\frac{1}{2}[\cup]1,4]$. (Pas besoin de mettre d'accolades autour de ces intervalles.)

## Exercice 5 :

*Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie par : $u_0 = 3$, et pour tout $n \in \mathbf{N}$,*

$$u_{n+1} = 2u_n - 1.$$

*Donner l'expression du terme général $u_n$ pour $n \in \mathbf{N}$.*

On va commencer par calculer les premiers termes de la suite, puis formuler une conjecture sur l'expression de $u_n$, et montrer cette conjecture par récurrence.

On calcule : $u_1 = 5$, $u_2 = 9$, $u_3 = 17$, $u_4 = 33$, etc. On peut conjecturer : $u_n = 2^{n+1}+1$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Si on ne trouve pas cette conjecture, on peut aussi remarquer que la différence $u_n - u_{n-1}$ est égale à $2^n$ pour les termes calculés, on peut donc conjecturer $u_n = u_0 + \sum_{k=1}^n 2^k = 3 + (2^{n+1}-2) = 2^{n+1}+1$.

Il reste à montrer cette conjecture par récurrence : pour tout $n \in \mathbf{N}$, définissons la proposition $P(n)$ : « $u_n = 2^{n+1}+1$ ».

- Tout d'abord, $P(0)$ est vraie, puisque $u_0 = 3 = 2^1+1$.
- Maintenant, prenons $n \in \mathbf{N}$ quelconque, et supposons que $P(n)$ est vraie. On va en déduire $P(n+1)$. En effet, on a $u_{n+1} = 2u_n - 1$ par définition de la suite, et $u_n = 2^{n+1}+1$ par hypothèse de récurrence. Ainsi $u_{n+1} = 2(2^{n+1}+1) - 1 = 2^{n+2}+2-1 = 2^{(n+1)+1}+1$, donc $P(n+1)$ est bien vérifiée.

Par principe de récurrence, on a donc bien montré que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}$, c'est-à-dire que $u_n = 2^{n+1}+1$ pour $n \in \mathbf{N}$.

**Remarques :**

- Attention, si on écrit simplement « $u_{n+1} = u_n + 2^{n+1}$ pour $n \in \mathbf{N}$ », ce n'est pas une expression de $u_n$ en fonction de $n$. C'est une nouvelle relation de récurrence. Mais si on arrive à la montrer, et si on la combine avec la relation déjà existante, on trouvera bien « $u_n = 2^{n+1}+1$ ».
- Une fois qu'on a formulé une conjecture, c'est une bonne idée de la vérifier sur les quelques valeurs qu'on a calculées (de préférence plus de 3 valeurs).