Feuille 2 : Limites et continuité des fonctions

Exercice 2-1

Soit $f(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x \leq -1 \\ x^2+1 & \text{si } -1 < x \leq 0 \\ \sin(x/4) & \text{si } x > 0. \end{cases}$

1. Dessiner le graphe de f.
2. Calculer les limites suivantes :

   (a) $\lim\limits_{x \to -1-} f(x)$ (c) $\lim\limits_{x \to 0-} f(x)$ (e) $\lim\limits_{x \to \pi-} f(x)$

   (b) $\lim\limits_{x \to -1+} f(x)$ (d) $\lim\limits_{x \to 0+} f(x)$ (f) $\lim\limits_{x \to \pi+} f(x)$

3. En déduire les limites suivantes et comparer les avec la valeur de f au point concerné.

   (a) $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$ (b) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ (c) $\lim\limits_{x \to \pi} f(x)$

Exercice 2-2 Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2}$
2. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3-1}{x^2-1}$
3. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{2x+5}{x-4}$
4. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^9-17}{x^7}$
5. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^3-5x^2+7}{8+2x-5x^3}$
6. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2+3}{x^3+2}$
7. $\lim\limits_{x \to 1} |x-1|$
8. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{|x-1|}$
9. $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{1}{|x-1|}$
10. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{\sqrt{1+x}-1}$
11. $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{1}{1-x^2}\right)$
12. $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2+2x+5} - x$
13. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sin x}{x}$
14. $\lim\limits_{x \to 0} x \sin(\dfrac{1}{x})$
15. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2+\sin x}{x^2+\cos x}$
16. $\lim\limits_{x \to 0+} x^x$
17. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1+2\sin(x)}{1+\sqrt{x}}$
18. $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x-\sin x}$
19. $\lim\limits_{x \to 0} E(x+1)$
20. $\lim\limits_{x \to 0} xE(\dfrac{1}{x})$
21. $\lim\limits_{x \to +\infty} xE(\dfrac{1}{x})$

où $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ désigne la partie entière de $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 2-3

Rappelons que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$ et que $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$.
Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(2x)}{\sqrt{x}}$
2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2\sin(1/x)}{\sin x}$
3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x}$
4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos(\pi x)}{1-2x}$
5. $\lim\limits_{x \to 1/2} (2x^2+x-1)\tan(\pi x)$
6. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x^2}$
7. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x^2)}{\sin^2 x}$
8. $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x}\ln^3 x$
9. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\exp(\ln^2 x)}{x^n}$, $n \in \mathbb{Z}$

Exercice 2-4

1. Si $\lim_{x\to 2} \frac{f(x)-5}{x-2} = 5$, trouver $\lim_{x\to 2} f(x)$.
2. Si $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2} = -2$, trouver $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}$.

Exercice 2-5 Étudier la continuité à gauche, la continuité à droite et la continuité des fonctions suivantes en chaque point de leur domaine de définition.

1. $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ 2x-1 & \text{si } 1 < x \le 2 \end{cases}$
2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x + \frac{\sqrt{x^2}}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$.
3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = xE(1/x)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$, où E dénote la partie entière.

Exercice 2-6

1. Déterminer les valeurs de $k \in \mathbb{R}$ pour lesquelles f_k définie par $f_k(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \le 2 \\ k - x^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ est une fonction continue.
2. Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = \frac{1+x^3}{1+x}$. Trouver une application continue $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $g|_{\mathbb{R}\setminus\{-1\}} = f$

Exercice 2-7 Montrer que l'équation $x^3 - 15x + 1 = 0$ a trois solutions dans l'intervalle $[-4, 4]$.

Exercice 2-8 Montrer qu'il existe $x \in [3\pi/4, \pi]$ tel que $\tan x + \frac{x}{3} = 0$.

Exercice 2-9 Montrer que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue telle que $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$, alors f est surjective.

Exercice 2-10 Quelles sont les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues dont l'image est contenue dans $\mathbb{Z}$? dans $\mathbb{Q}$?

Exercice 2-11 Pour tout entier $n \ge 2$, on considère la fonction $f_n : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ donnée par

$$f_n(x) = x^n - x - 1$$

1. Montrer qu'il existe un unique $x_n > 1$ tel que $f_n(x_n) = 0$.
2. Montrer que $f_{n+1}(x_n) > 0$.
3. En déduire que la suite $(x_n)_{n\ge 2}$ est décroissante et converge vers une limite l.
4. Déterminer l.

Exercice 2-12

Vrai ou faux ?

1. Si f est continue sur un intervalle fermé borné $[a, b]$ vers $\mathbb{R}$, alors $f([a, b])$ est un intervalle fermé borné.
2. Si f est continue sur un intervalle ouvert borné $]a, b[$ vers $\mathbb{R}$, alors $f(]a, b[)$ est un intervalle ouvert borné.
3. Si f est continue sur un intervalle ouvert borné $]a, b[$ vers $\mathbb{R}$, alors $f(]a, b[)$ est un intervalle ouvert, mais pas forcément borné.
4. Si f est continue sur un intervalle ouvert borné $]a, b[$ vers $\mathbb{R}$, alors $f(]a, b[)$ est un intervalle, mais pas forcément ouvert ni borné.

Exercice 2-101 Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+5}-\sqrt{x-3}$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x+1}-(x+1)$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(2x)}{\sin(3x)}$
5. $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln^2 x-\sqrt{x}$
6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos(3x))}{\ln(\cos(2x))}$
7. $\lim\limits_{x\to 1+} \ln x \ln(\ln x)$
8. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x+1)}{\ln x}$
9. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-\sqrt{x}}{\ln x + x}$

Exercice 2-102 Soit f une fonction décroissante sur $]0;+\infty[$ telle que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$. Montrer que, pour tout $x\in\mathbb{R}^+$ on a $f(x)\geq 0$.

Exercice 2-103 Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction périodique qui admet une limite en $+\infty$. Que peut-on dire de f ?

Exercice 2-104

1. Soient $n\in\mathbb{Z}$ un entier impair et $a_i\in\mathbb{R}, \forall i\in\{0,1,2,\ldots,n\}$. Montrer que l'équation $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0=0$ admette une solution réelle.
2. Donner un contre-exemple pour le cas n est pair.

Exercice 2-105 Supposons que f est une fonction continue sur $[0,1]$ et que $0\leq f(x)\leq 1$ pour chaque $x\in[0,1]$. Montrer qu'il existe un $c\in\mathbb{R}$ tel que $f(c)=c$. (Indication : si $f(0)=0$ ou $f(1)=1$ alors on a un tel point c, sinon appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction définie par $g(x)=f(x)-x$.)

Exercice 2-106 Étudier la continuité de la fonction $f:[-2,2]\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=x^2\sin(\pi/x)$ si $x\neq 0$ et $f(0)=0$, sur le domaine de définition.

Exercice 2-107 Déterminer les valeurs de $m\in\mathbb{R}$ pour lesquelles g_m définie par $g_m(x)=\begin{cases} x-m & \text{si } x\leq 3\\ 1-mx & \text{si } x\geq 3\end{cases}$ est une fonction continue.

Exercice 2-108

1. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continue et périodique. Montrer que f est bornée.
2. En utilisant le résultat précédent, calculer la limite
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x(\sin^8 x+\cos^{14} x)}$$

Exercice 2-109 Soient $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est bornée et $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue. Montrer que $g\circ f$ et $f\circ g$ sont bornées.

Exercice 2-110 Soient a et b deux nombres réels tels que $a<b$ et f une application de $[a,b]$ vers $[a,b]$.

1. On suppose que pour tout $(x,y)\in[a,b]\times[a,b]$ on a
$$|f(x)-f(y)|\leq|x-y|.$$
ontrer que f est continue. En déduire qu'il existe $x\in[a,b]$ tel que $f(x)=x$.
2. On suppose maintenant que pour tout $(x,y)\in[a,b]\times[a,b]$ avec $x\neq y$ on a
$$|f(x)-f(y)|<|x-y|.$$
Montrer qu'il existe un unique $x\in[a,b]$ tel que $f(x)=x$.

Exercice 2-111 Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, f et g deux fonctions définies sur I.

1. Soit $a\in I$. Donner une raison pour laquelle :
$$(\lim_{x\to a} f(x)=f(a)) \Rightarrow (\lim_{x\to a}|f(x)|=|f(a)|)$$
2. En utilisant la question précédente, montrer que si f et g sont continues, alors $\sup(f,g)=\frac{1}{2}(f+g+|f-g|)$ l'est aussi.

Feuille 2 bis : Retour sur les réciproques

Exercice 2bis-1

Montrer que chacune des applictions suivantes est bijective en explicitant sa réciproque :

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 3x + 1$.
2. $g : \,]e, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \ln(\ln(\ln x)))$.
3. $a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $a(s, t) = (2s, 3t)$.
4. $b : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $b(s, t) = (s + t, s - t)$.
5. $F : [1, 10[\times \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^{+*}$ définie par $F(t, n) = t \cdot 10^n$.

Exercice 2bis-2

Soit E, F et G trois ensembles et soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. On suppose g et $g \circ f$ bijectives. En utilisant la bijection réciproque g^{-1}, montrer que f est bijective.

Exercice 2bis-3

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une bijection. On suppose f strictement croissante. Montrer que la bijection réciproque f^{-1} est également strictement croissante.

Exercice 2bis-4

1. Rappeler pourquoi sh est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.
2. À l'aide d'une formule vue en cours, calculer la dérivée de la réciproque sh^{-1}.
3. Pour y réel, déterminer une expression de $\mathrm{sh}^{-1}(y)$ et retrouver le résultat du 2.

Exercice 2bis-5

1. Montrer qu'on peut restreindre la fonction ch en une fonction c de $\mathbb{R}_+$ vers $[1, +\infty[$.
2. On considère la fonction $d : [1, +\infty[\to \mathbb{R}_+$ définie pour tout $y \geq 1$ par $d(y) = \ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right)$. Calculer $c \circ d$. Les fonctions c et d sont-elles réciproques l'une de l'autre ?
3. Calculer $d \circ c$.

Exercice 2bis-101

1. Soit $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$. Montrer que z s'écrit d'une façon et d'une seule sous la forme $z = re^{i\theta}$ avec $-\pi < \theta < \pi$.
2. Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ écrit $re^{i\theta}$ comme à la question 1, on pose $f(z) = \sqrt{r}e^{i\theta/2}$. Montrer que $\mathrm{Re}[f(z)] > 0$ et qu'on peut donc restreindre f en une application de $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ vers $\{w \mid \mathrm{Re}(w) > 0\}$.
3. Montrer que f est bijective en fournissant sa réciproque.

Exercice 2bis-102

Soit E un ensemble et $f : E \to E$ une application. On suppose $f \circ f \circ f = \mathrm{Id}_E$. Montrer que f est une bijection.