
Feuille d'exercices n° 5

Exercice 1. Pour chacune des équations suivantes, déterminer l'ensemble des solutions maximales, puis la solution satisfaisant de plus $x(0) = 1$ et $x'(0) = 0$.

1. $x''(t) + 2x'(t) - 3x(t) = 0, t \in \mathbf{R}$.
2. $x''(t) + 2x'(t) + x(t) = 0, t \in \mathbf{R}$.
3. $x''(t) - 2x'(t) + 5x(t) = 0, t \in \mathbf{R}$.

Exercice 2. Déterminer l'ensemble des solutions maximales des équations suivantes

1. $x''(t) + 2x'(t) - 3x(t) = e^{2t}, t \in \mathbf{R}$.
2. $x''(t) + 2x'(t) - 3x(t) = e^t, t \in \mathbf{R}$.

Exercice 3. Dans les trois cas suivants, déterminer l'ensemble des solutions maximales de l'équation différentielle $y'(t) = Ay(t), t \in \mathbf{R}$:

$$(i) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad (ii) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad (iii) A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dans le cas (i), déterminer la solution vérifiant $y(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 4. Soit $\omega_0 > 0, c \in \mathbf{R}^*$. Soit $\omega > 0$ tel que $\omega \neq \omega_0$. On considère l'équation différentielle du second ordre

$$(E_\omega) \quad y''(t) + \omega_0^2 y(t) = c \sin(\omega t), t \in \mathbf{R}.$$

Cette équation modélise le mouvement d'un corps attaché à un ressort élastique sous l'action d'une force périodique de pulsation ω , en l'absence de frottement ; $y(t)$ représente la position du corps à l'instant t .

1. Déterminer une solution particulière z_ω de (E_ω) .
2. Donner toutes les solutions de (E_ω) .
3. Déterminer la solution y_ω de (E_ω) vérifiant $y_\omega(0) = 1$ et $y'_\omega(0) = \frac{c\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$.
4. Montrer que $\lim_{\omega \rightarrow \omega_0} \left(\sup_{t \in \mathbf{R}} |y_\omega(t)| \right) = +\infty$. Ce phénomène est appelé *résonance*.

Exercice 5. Soit $q : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue et intégrable, i.e. $\int_{-\infty}^{+\infty} |q(t)| dt < \infty$. On considère l'équation différentielle linéaire

$$x''(t) + q(t)x(t) = 0, t \in \mathbf{R}. \tag{1}$$

1. Justifier que toute solution de (1) est définie sur \mathbf{R} tout entier.
2. Soit $x : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ une solution bornée de (1). Montrer que $\lim_{t \rightarrow +\infty} x'(t) = 0$.
3. Montrer que l'équation (1) admet des solutions non bornées. *Indication : on pourra considérer un système fondamental de solutions et leur wronskien.*

Exercice 6. Soit $\theta : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue telle que $\int_0^{+\infty} |\theta(t)| dt < \infty$. On considère l'équation différentielle linéaire

$$x''(t) + (1 + \theta(t))x(t) = 0, \quad t \in \mathbf{R}. \quad (2)$$

On suppose que $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ est une solution de (2). On pose pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$g(t) = f(t) + \int_0^t \theta(s)f(s) \sin(t-s) ds.$$

1. Vérifier que pour tout $t \in \mathbf{R}$, $g''(t) + g(t) = 0$.
2. En déduire qu'il existe $A \geq 0$ tel que pour tout $t \geq 0$, $|f(t)| \leq A + \int_0^t |\theta(s)| \cdot |f(s)| ds$.
3. Montrer que f est bornée sur \mathbf{R}_+ .

Exercice 7. Soit $u \in \mathbf{R}^3$ tel que $\|u\|_2 = 1$. Pour deux vecteurs x et y dans \mathbf{R}^3 , on note $x \cdot y$ leur produit scalaire (canonique). On rappelle la définition du produit vectoriel de deux vecteurs x et y dans \mathbf{R}^3 : $x \wedge y$ est le vecteur de \mathbf{R}^3 tel que pour tout $z \in \mathbf{R}^3$, $\det(x, y, z) = (x \wedge y) \cdot z$; le vecteur $x \wedge y$ est orthogonal à x et à y et

$$\text{si } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ et } y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \text{ alors on a aussi } x \wedge y = \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}.$$

On considère l'équation différentielle

$$x'(t) + u \wedge x(t) = 0, \quad t \in \mathbf{R} \quad (3)$$

où $x : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^3$.

1. Soit $x_0 \in \mathbf{R}^3$. Justifier que l'équation (3) admet une unique solution maximale vérifiant $x(0) = x_0$ et que cette solution est définie sur \mathbf{R} . On note x cette solution.
2. Montrer que pour tout $t \in \mathbf{R}$, $\|x(t)\|_2 = \|x_0\|_2$.
3. Montrer que l'application $t \mapsto x(t) \cdot u$ est constante sur \mathbf{R} .
4. Réécrire (3) sous la forme $x'(t) = Ax(t)$.
5. Calculer explicitement la solution dans le cas $u = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dessiner la trajectoire dans un repère de \mathbf{R}^3 .
6. Donner l'expression de x dans le cas général.

Exercice 8. Deux équations différentielles linéaires à coefficients périodiques

1. *En dimension 1.* Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue et T -périodique (avec $T > 0$). On s'intéresse à l'équation différentielle linéaire suivante

$$u'(t) = f(t)u(t), \quad t \in \mathbf{R}. \quad (4)$$

- (a) Trouver $b \in \mathbf{R}$ et $q : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^{+*}$ une application continue et T -périodique telle que u est solution de (4) si et seulement si $v : t \mapsto q(t)u(t)$ est solution de $v' = bv$.
 - (b) En déduire une condition nécessaire et suffisante sur la fonction f pour que les solutions de (4) soient toutes bornées.
2. *En dimension 2.* On considère le système différentiel $u'(t) = A(t)u(t)$ où pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$A(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

- (a) Soit $u : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$ une solution de $u'(t) = A(t)u(t)$. Trouver une équation différentielle satisfaite par $r : t \mapsto r(t) = \sqrt{u_1(t)^2 + u_2(t)^2}$ où $(u_1(t), u_2(t))$ sont les composantes de $u(t)$.
- (b) En déduire que les solutions de $u'(t) = A(t)u(t)$ sont toutes bornées sur \mathbf{R} .