Feuille d'exercices n° 4

__Exercice 1.__ Soit $A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 1 - x^2 < |y| < 2(1 - x^2)\}$. Montrer que A n'est pas une partie connexe de $\mathbf{R}^2$. Déterminer deux éléments P et Q de $\mathbf{R}^2$ tels que $A \cup \{P\}$ et $A \cup \{Q\}$ soient connexes. Conclure qu'une intersection de connexes n'est, en général, pas connexe.

__Exercice 2.__ Soit A une partie non vide, ouverte et fermée dans un espace métrique (X, d). Soit $a \in A$ et C_a la composante connexe de X contenant a. Montrer que $C_a \subset A$. En déduire que toute partie $A \subseteq X$ qui est non vide, ouverte, fermée et connexe est une composante connexe de X.

__Exercice 3.__ (Théorème du passage à la douane.) Soient A et B deux parties d'un espace métrique X. On suppose A connexe. Montrer que si A rencontre B et son complémentaire alors A rencontre la frontière de B.

__Exercice 4.__ Soit $f : X \to Y$ une application continue entre deux espaces métriques. Soit A une partie connexe par arcs de X. Montrer que $f(A)$ est une partie connexe par arcs de Y.

__Exercice 5.__ Déterminer les composantes connexes de $\mathbf{R}^2 \setminus S(0, R)$ où $S(0, R) = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = R^2\}$ et $R > 0$ est fixé.

__Exercice 6.__ Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbf{R}$. On suppose que f' prend des valeurs positives et des valeurs négatives et on veut montrer que f' s'annule.

1. Montrer que $A = \{(x, y) \in I^2 \mid x < y\}$ est une partie connexe par arcs de I^2.
2. Soit $\delta : A \to \mathbf{R}$ l'application définie par $\delta(x, y) = f(y) - f(x)$. Montrer que 0 est dans l'image de δ.
3. Conclure en utilisant le théorème de Rolle.

__Exercice 7.__ Dans cet exercice, on munit $M_n(\mathbf{R})$ et $M_n(\mathbf{C})$ d'une norme quelconque (plus tard, il sera vu que dans un espace vectoriel normé de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes).

1. Montrer que $\mathrm{GL_n}(\mathbf{R})$ n'est pas une partie connexe de $M_n(\mathbf{R})$.
2. Dans cette question, on va montrer que $\mathrm{GL_n}(\mathbf{C})$ est une partie connexe par arcs de $M_n(\mathbf{C})$.
   (a) Soit $A \in M_n(C)$ une matrice triangulaire supérieure de déterminant non nul. Construire une application $\varphi : [0, 1] \to M_n(\mathbf{C})$ continue telle que $\varphi(0) = I_n$, $\varphi(1) = A$ et pour tout $t \in [0, 1]$, $\varphi(t)$ est une matrice triangulaire supérieure inversible.
   (b) Déduire de la question précédente que $\mathrm{GL_n}(\mathbf{C})$ est connexe par arcs.

__Exercice 8.__ Comme dans l'exercice précédent, on munit $M_n(\mathbf{R})$ d'une norme quelconque. Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables est connexe par arcs. (On pourra montrer que toute matrice de cet ensemble peut être reliée à la matrice identité par un chemin continu dans cet ensemble).

Exercice 9. Soit $f : X \to Y$ localement constante. Que peut-on dire de f si on suppose X connexe ? Que peut-on dire en général ?

Exercice 10. Dans $\mathbf{R}^2$ muni de sa topologie usuelle, soit $A = \{(x, \sin(\frac{1}{x}))\ ;\ x > 0\}$.

1. Montrer que A est une partie connexe par arcs.
2. Déterminer $\bar{A}$ et justifier que $\bar{A}$ est connexe.
3. Dans cette question, on va montrer que $\bar{A}$ n'est pas connexe par arcs. Par l'absurde, supposons qu'il existe un chemin $\gamma : [0,1] \to \bar{A}$ reliant $\gamma(0) = (0,0)$ et $\gamma(1) = (\frac{1}{2\pi}, 0)$. Écrivons $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$, pour tout $t \in [0,1]$.
   (a) Soit $t_0 = \text{supp}(\gamma_1^{-1}(0))$. Justifier que ce sup est fini et que $t_0 < 1$ et enfin que $\gamma_1(t_0) = 0$.
   Le temps t_0 est l'instant ou l'on quitte le bord gauche, à savoir $\{0\} \times [-1,1]$.
   (b) Justifier que pour tout $t_1 \in]t_0, 1]$, il existe t_2 et t_2' dans $]t_0, t_1[$ tels que $\gamma_2(t_2) = 1$ et $\gamma_2(t_2') = -1$.
   (c) Utiliser la continuité de γ_2 en t_0 pour aboutir à une contradiction.

Exercice 11. On dit qu'un espace métrique satisfait la condition du point fixe (PF) si toute fonction continue $f : X \to X$ admet au moins un point fixe.

1. Montrer que l'intervalle $[0,1]$ (muni de la métrique euclidienne) satisfait (PF).
2. Étant donnés deux espaces métriques homéomorphes X et Y, montrer que si l'un d'eux satisfait (PF) alors l'autre également.
3. Montrer que si X satisfait (PF) alors X est connexe. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 12. (Théorème de Darboux) Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbf{R}$.

1. Montrer que $U = \{(x,y) \in I^2 \mid x < y\}$ est une partie connexe par arcs de $\mathbf{R}^2$.
2. Soit $h : U \to \mathbf{R}$ définie par $h(x,y) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$. Montrer que $h(U) \subseteq f'(I) \subseteq \overline{h(U)}$.
3. En déduire que $f'(I)$ est un intervalle de $\mathbf{R}$.

Exercice 13. Soit $T = (\{0\} \times [-1,1]) \cup ([-1,1] \times \{0\}) \subset \mathbf{R}^2$ muni de la métrique euclidienne. Montrer que T n'est homéomorphe à aucun intervalle de $\mathbf{R}$.

Exercice 14. Soit E un espace vectoriel normé de dimension ≥ 2 (la dimension pouvant être infinie). Montrer que pour tout $R > 0$, la sphère de centre 0 et rayon R est connexe par arcs. En déduire que pour tout $R > 0$, la partie $E \smallsetminus B(0,R)$ est connexe par arcs, puis que $E \smallsetminus \{0\}$ l'est également.