Fiche 2 - Applications linéaires et matrices

Exercice 1. Parmi les fonctions suivantes, déterminer celles qui sont des applications linéaires :

1. La fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donnée par $f(x, y) = (0, 2y)$.
2. La fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donnée par $g(x, y) = (x + 3, y)$.
3. La fonction $h : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ donnée par $h(x) = 1/x$.
4. La fonction $\phi : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ donnée par $\phi(P) = (1-X)P'$, (où $\mathbb{R}_2[X]$ est l'ensemble des polynômes de degré 2 à coefficients réels).

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ donnée par $f(x, y) = (x + 2y, x - y, x)$.

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Trouver une base pour $\ker(f)$ et en déduire le rang de f.

Exercice 3. Soit $u : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ défini par $u(P) = 2P + P'$.

1. Montrer que u est une application linéaire.
2. Déterminer $\ker(u)$ et donner une base. En déduire le rang de u.

Exercice 4. On considère les matrices A, B, C, D définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $A + B$, AB, AD, λA, $A - \lambda C$, où λ est un nombre réel quelconque.
2. Calculer $\det(A)$, $\det(B)$, $\det(AB)$. A-t-on $\det(AB) = \det(BA)$?

Exercice 5. On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix},\ E = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Quels sont les produits matriciels possibles ? En calculer au moins trois.

Exercices supplémentaires

Exercice 6. Parmi les applications suivantes, déterminer celles qui sont linéaires (avec $a \in \mathbb{R}$) :

a) $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (y, x) \end{array}$ b) $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (x, a) \end{array}$ c) $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (ax, ay) \end{array}$

d) $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (x + a, y + a) \end{array}$ e) $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x + z, y + z) \end{array}$

f) $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \longmapsto & (2x, 0, x - y) \end{array}$ g) $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin x \end{array}$

Exercice 7. Soit u l'application de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ définie, pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, par

$$u(x, y, z, t) = (x + y + z + t, y - t, x - 2z + 3t).$$

1. Montrer que u est linéaire.

2. Déterminer une base et la dimension du noyau $\ker(u)$ de u.
3. En dééduire le rang de u.

Exercice 8. Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des applications linéaires. Montrer que $x \mapsto f(x) + g(x)$ est linéaire et que $x \mapsto f(x)g(x)$ n'est pas linéaire.

Exercice 9. Pour une matrice carré réelle $A = (a_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$, on définit l'application trace par $Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$.

1. Posons
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Calculer $Tr(A)$, $Tr(B)$ et $Tr(A+B)$.
2. Montrer que l'application trace est linéaire.

Exercice 10. Soit Φ la fonction définie sur l'ensemble des fonctions définies et continues sur $\mathbb{R}$ donnée par
$$\Phi : f \longmapsto \Big(x \mapsto \int_0^x f(t)dt\Big).$$

1. Montrer que Φ est linéaire.
2. Déterminer son noyau.
3. Déterminer son image.

Exercice 11. Soit f l'homothétie de rapport $\alpha \in \mathbb{R}^*$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ donnée par $f(x, y) = \alpha(x, y)$.

1. Montrer que c'est une application linéaire.
2. Déterminer $\ker f$.
3. Soit $(x', y') \in \mathbb{R}$, représenter graphiquement son antécédent par f. En déduire $\mathrm{Im} f$.

Exercice 12. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, f_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit $u : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par
$$u(e_1) = f_1 - f_2 + 2f_3;\ u(e_2) = 2f_1 + f_2 - 3f_3;\ u(e_3) = 3f_1 - f_3;\ u(e_4) = -f_1 - 2f_2 + 5f_3.$$

1. Déterminer l'image par u du vecteur $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$.
2. Déterminer une base de $\ker(u)$ et sa dimension.
3. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(u)$ et le rang de u.

Exercice 13. On considère $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par
$$f(\vec{e}_1) = \vec{e}_1\,, \quad f(\vec{e}_2) = -\vec{e}_1\,, \quad f(\vec{e}_3) = \vec{e}_3\,.$$

1. Déterminer l'image par f d'un élément $\vec{u} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$ de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer le noyau et l'image de f et donner une base de chacun d'eux.
3. Montrer que $f \circ f = f$.

Exercice 14. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

1. Calculer A^2 et A^3.
2. Calculer A^n pour tout entier n strictement positif.

Exercice 15. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice 2×2 à coefficients dans $\mathbb{R}$. Montrer que si A est inversible alors son inverse est donné par la formule
$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$