

Chapitre 2 : Suites et séries numériques et de fonctions

I.1. Suites numériques

Dans la suite \mathbb{K} désigne le *corps* des nombres réels \mathbb{R} ou le *corps* des nombres complexes \mathbb{C} .

Rappel

- Pour tout nombre complexe $z = a + ib \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, il existe un unique couple $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[$ tel que $z = \rho e^{i\theta}$. On a

$$|z| = \rho = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad a = \rho \cos \theta, \quad b = \rho \sin \theta .$$

- Si x est réel alors la valeur absolue $|x|$ coïncide avec le module de x .

Définition

Une suite **numérique réelle** est une suite de nombres réels

$$u_0, u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$$

et une suite **numérique complexe** est une suite de nombres complexes

$$u_0, u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$$

Formellement, c'est une application

$$u: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}, n \mapsto u_n,$$

où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, selon on considère les suites réelles ou complexes.

- On note par $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou $(u_n)_n$ la suite.
- On appelle u_n le **terme général** de la suite $(u_n)_n$.

Une suite peut être définie de multiples façons :

- en donnant explicitement le terme général u_n en fonction de n :
exemples : $u_n = \frac{1}{n}$, $u_n = (1 + i)^n$, ...
- par récurrence : $u_{n+1} = f(u_n)$
exemples : $u_{n+1} = u_n + 3$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + 3u_n$, ...
- par d'autres moyens plus ou moins théoriques ou pratiques :
exemples : u_n est la n -ième décimale de π , u_n est la population mondiale en l'année n , ...
- ...

Remarque

L'espace des suites de \mathbb{K} est un \mathbb{K} -espace vectoriel pour les opérations :

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} + (v_n)_{n \in \mathbb{N}} = (u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad \lambda(u_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\lambda u_n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Définition

Soit $r > 0$ et $a \in \mathbb{K}$. On appelle **disque de rayon r et de centre a** dans \mathbb{K} , l'ensemble

$$D_r(a) = \{x \in \mathbb{K}, |x - a| \leq r\}.$$

- Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $z = x + iy$, $z_0 = x_0 + iy_0$, alors

$$D_r(z_0) = \left\{ z \in \mathbb{C}, |z - z_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \leq r \right\}$$

ce qui représente dans le plan un *disque* de rayon r et de centre (x_0, y_0) .

- Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, alors $D_r(a)$ est l'*intervalle* $[a - r, a + r]$.

Définition

Soit $a \in \mathbb{K}$. Un sous-ensemble $V \subseteq \mathbb{K}$ est appelé **un voisinage** de a s'il existe $r > 0$ tel que $D_r(a) \subseteq V$.

Définition

Soient (u_n) une suite de \mathbb{K} et $a \in \mathbb{K}$. On dit que a est la **limite** de $(u_n)_n$ et on note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ si pour tout $r > 0$, il existe $N_r \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_r$, on ait $u_n \in D_r(a)$.

Définition équivalente

On dit que a est la **limite** de $(u_n)_n$ et on note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ si pour tout voisinage V de a , il existe $N_V \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_V$, on ait $u_n \in V$.

Convergence

On dit que $(u_n)_n$ est **convergente** s'il existe $a \in \mathbb{K}$ tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$. Une suite qui n'est pas convergente est dite **divergente**.

Exemples

- $u_n = \frac{1}{n}$, $n \geq 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.
- $u_n = \frac{n}{n+1}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.
- $u_n = \frac{n}{n+1} + i \frac{2n^2}{n^2+2}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1 + 2i$.
- $u_n = z^n$, $z \in \mathbb{C}$, avec $0 \leq |z| < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} z^n = 0$.

Définition

Soit $(u_n)_n$ une suite **réelle**.

- On dit que $(u_n)_n$ tend vers $+\infty$ et on écrit $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, si

$$\forall M > 0, \exists N_M \in \mathbb{N}, \forall n (n \geq N_M \Rightarrow u_n \geq M).$$

- On dit que $(u_n)_n$ tend vers $-\infty$ et on écrit $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$, si

$$\forall M < 0, \exists N_M \in \mathbb{N}, \forall n (n \geq N_M \Rightarrow u_n \leq M).$$

Exemples

- $u_n = n, \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$
- $u_n = -\ln n, \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty.$

Remarque

Si $(u_n)_n$ est une suite complexe, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ ou $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ n'a pas de sens.

Proposition

Soit $(z_n)_n$ une suite de nombres complexes. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- 1 $(z_n)_n$ est convergente,
- 2 les suites réelles $(\operatorname{Re}(z_n))_n$ et $(\operatorname{Im}(z_n))_n$ sont convergentes.

De plus $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = a + ib$ si et seulement si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \operatorname{Re}(z_n) = a$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \operatorname{Im}(z_n) = b$.

Proposition

Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites convergentes de \mathbb{K} , de limites respectives ℓ_1 et ℓ_2 . Alors :

- pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, la suite $(\lambda u_n)_n$ est convergente de limite $\lambda \ell_1$,
- la suite $(u_n + v_n)_n$ est convergente de limite $\ell_1 + \ell_2$,
- la suite $(u_n v_n)_n$ est convergente de limite $\ell_1 \ell_2$,
- si $\ell_2 \neq 0$, alors $v_n \neq 0$ pour n assez grand et $(u_n/v_n)_n$ est convergente de limite ℓ_1/ℓ_2 .

Proposition

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que $u_n \leq v_n$ pour n assez grand. Si $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont convergentes de limites respectives ℓ_1 et ℓ_2 alors $\ell_1 \leq \ell_2$.

Théorème des gendarmes

Soient (a_n) , (b_n) et (u_n) trois suites réelles telles que

$$\begin{cases} a_n \leq u_n \leq b_n \text{ pour } n \text{ assez grand,} \\ (a_n) \text{ et } (b_n) \text{ convergent vers une même limite } \ell. \end{cases}$$

Alors (u_n) est convergente de limite ℓ .

Proposition

Si $(u_n)_n$ est une suite convergente de limite ℓ alors la suite $(|u_n|)_n$ est convergente de limite $|\ell|$.

Preuve. Conséquence de la propriété

$$||u_n| - |\ell|| \leq |u_n - \ell|.$$



Rappel

Si $(u_n)_n$ est une suite complexe alors $|u_n|$ est le module de u_n et si $(u_n)_n$ est réelle alors $|u_n|$ est la valeur absolue de u_n .

Suites arithmétiques

Soit $a, r \in \mathbb{K}$. La suite arithmétique de premier terme a et de raison r est la suite définie par récurrence par :

$$\begin{cases} u_0 = a, \\ u_{n+1} = u_n + r. \end{cases}$$

Propriétés :

$$u_n = a + nr, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N},$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} = na + r \frac{n(n-1)}{2}.$$

$(u_n)_n$ converge $\Leftrightarrow r = 0 \Leftrightarrow (u_n)$ est constante

Suites géométriques

Soit $a, r \in \mathbb{K}$. La suite géométrique de premier terme a et de raison r est la suite définie par récurrence par :

$$\begin{cases} u_0 = a, \\ u_{n+1} = r u_n . \end{cases}$$

Propriétés :

$$u_n = ar^n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N},$$

$$\sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \begin{cases} a \frac{1-r^{n+1}}{1-r} & \text{si } r \neq 1, \\ a(n+1) & \text{si } r = 1. \end{cases}$$

$$(u_n)_n \text{ converge} \Leftrightarrow 0 \leq |r| < 1 \text{ ou } r = 1.$$

Définition

Une suite $(u_n)_n$, réelle ou complexe, est dite **bornée** si

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M.$$

Définition

Une suite **réelle** (u_n) est dite **majorée** si

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M,$$

et **minorée** si

$$\exists m \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, m \leq u_n.$$

Propriété

Une suite réelle est bornée si et seulement si elle est majorée et minorée. □

Théorème

Toute suite (réelle ou complexe) convergente est bornée.

Définition

On dit qu'une suite réelle (u_n) est **croissante** si

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq u_n,$$

décroissante si

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n$$

et **monotone** si elle est croissante ou décroissante.

Théorème

- Une suite réelle croissante est convergente si et seulement si elle est majorée.
- Une suite réelle décroissante est convergente si et seulement si elle est minorée.

I.2. Séries numériques

Soit $(u_n)_n$ une suite réelle ou complexe. On s'intéresse à la **somme du nombre infini de termes**

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n + \cdots$$

dont on voudrait donner un sens et voir si elle est finie ou non. Informellement, c'est ce qu'on appelle une **série**.

L'idée est de considérer la suite $(S_n)_n$ définie par

$$S_0 = u_0, S_1 = u_0 + u_1, \dots, S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n, \dots$$

et d'étudier sa convergence. Si $(S_n)_n$ est convergente de limite ℓ , alors

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n + \cdots = \ell$$

et on écrit

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \ell .$$

Définition

Soit $(u_n)_n$ une suite réelle ou complexe. On appelle **série** de terme général u_n et on note $\sum u_n$, la **suite** $(S_n)_n$ définie par

$$S_n = \sum_{k=1}^n u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

- On appelle S_n la **la somme partielle d'ordre n** de la série $\sum u_n$.
- On dit que la série $\sum u_n$ converge (resp. diverge) si la suite $(S_n)_n$ converge (resp. diverge).
- Si la série converge, $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ est notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et est appelée la **somme** de la série $\sum u_n$.

Exemple : séries géométriques

Soient $z \in \mathbb{C}$ et soit $\sum u_n$ la série de terme général $u_n = z^n$, qu'on appelle **série géométrique de raison z** . La suite (u_n) est une suite géométrique de raison z et on a

$$\text{si } z \neq 1, S_n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}.$$

$$\text{si } z = 1, S_n = n + 1.$$

La série $\sum u_n$ converge si et seulement si $0 \leq |z| < 1$.

Si elle converge, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1 - z}$.

Exemple : série harmonique

La série $\sum u_n$ de terme général $u_n = \frac{1}{n}$ est appelée **la série harmonique**.
On a

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n},$$

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

et donc la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ est divergente.

Exemple : séries de Riemann

On appelle **série de Riemann** une série de la forme $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ où $\alpha > 0$.

La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Proposition

Une série complexe de terme général u_n est convergente si et seulement si les deux séries réelles de terme général respectif $Re(u_n)$ et $Im(u_n)$ sont convergentes.

Proposition

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries convergentes et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors les séries $\sum \lambda u_n$ et $\sum (u_n + v_n)$ sont convergentes et

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda u_n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n,$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

Théorème (Condition nécessaire de convergence)

Si la série $\sum u_n$ converge, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Preuve. On a, pour $n \geq 1$,

$$u_n = S_n - S_{n-1}$$

et donc comme $\sum u_n$ est convergente, $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = l$ et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n - S_{n-1} = l - l = 0.$$



Définition

On dit d'une série $\sum u_n$ qu'elle est **grossièrement divergente** si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \neq 0$.

Remarques

- Pour prouver la divergence de certaines séries, on montre que le terme général u_n ne tend pas vers 0.

Exemple : la série $\sum \ln n$ est divergente car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln n \neq 0$.

- La réciproque est fautive en général.

Exemple : la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ est divergente alors que $\frac{1}{n}$ tend vers 0.

Définition

On dit de la série $\sum u_n$ qu'elle est **absolument convergente** si la série $\sum |u_n|$ est convergente.

Théorème

Une série absolument convergente est convergente et

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|.$$

Exemple

Soit $\sum u_n$ la série de terme général $\frac{(-1)^n}{n^2}$. On a $|u_n| = 1/n^2$ et la série $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente. Par conséquent, la série $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ est absolument convergente et donc convergente.

Définition

Lorsqu'une série est convergente mais pas absolument convergente, on dit qu'elle est **semi-convergente**.

Séries à termes positifs

Séries à termes positifs

Soit $\sum u_n$ une série réelle de terme général u_n . On dit que la série est à **termes positifs** si $u_n \geq 0$ pour n assez grand.

Si $\sum u_n$ est une série à termes positifs, alors la suite $(S_n)_n$ est croissante (à partir d'un certain rang)

$$S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geq 0$$

et donc pour prouver que la série $\sum u_n$ est convergente, il suffit de montrer que la suite $(S_n)_n$ est majorée.

Si $\sum u_n$ est une série quelconque (réelle ou complexe), la série $\sum |u_n|$ est une série à termes positifs et donc la convergence de cette dernière implique la convergence de la série initiale $\sum u_n$ (convergence absolue).

Proposition

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs. On suppose que $u_n \leq v_n$, pour n assez grand.

- Si $\sum u_n$ est divergente alors $\sum v_n$ est divergente.
- Si $\sum v_n$ est convergente alors $\sum u_n$ est convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n .$$

Exemples

- On a

$$0 \leq \frac{|\cos n|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

et les deux séries $\sum \frac{|\cos n|}{n^2}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ sont à **termes positifs**.

La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente et donc la série $\sum \frac{|\cos n|}{n^2}$ est convergente.

En particulier, la série $\sum \frac{\cos n}{n^2}$ est convergente puisqu'elle est absolument convergente.

- On a

$$0 \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{\ln n}$$

et les deux séries $\sum \frac{1}{n}$ et $\sum \frac{1}{\ln n}$ sont à **termes positifs**.

La série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ est divergente et donc la série $\sum \frac{1}{\ln n}$ est divergente.

Rappel : équivalence

Soient (u_n) et (v_n) deux suites. On dit qu'elles sont **équivalentes à l'infini** et on écrit $u_n \sim_{+\infty} v_n$, s'il existe une suite $(\epsilon_n)_n$ telle que pour n assez grand $u_n = (1 + \epsilon_n) v_n$ avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} \epsilon_n = 0$.

Si $v_n \neq 0$ pour n assez grand,

$$u_n \sim_{+\infty} v_n \text{ si et seulement si } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n/v_n = 1.$$

Théorème

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs. Si $u_n \sim_{+\infty} v_n$, alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature (toutes les deux convergentes ou toutes les deux divergentes).

Exemple

On a

$$\ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) \sim_{+\infty} \frac{1}{2^n}$$

et les deux séries $\sum \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$ et $\sum \frac{1}{2^n}$ sont à **termes positifs**.

Comme la série $\sum \frac{1}{2^n}$ est une série géométrique convergente, on déduit que la série $\sum \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$ est convergente.

Rappel : négligeabilité

Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites. On dit $(u_n)_n$ est **négligeable** devant $(v_n)_n$ à l'infini et on écrit $u_n = o(v_n)$, s'il existe une suite $(\epsilon_n)_n$ telle que pour n assez grand $u_n = v_n \epsilon_n$ avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} \epsilon_n = 0$.

Si $v_n \neq 0$ pour n assez grand,

$$u_n = o(v_n) \text{ si et seulement si } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n/v_n = 0 .$$

Théorème

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs telles que $u_n = o(v_n)$.

- Si la série $\sum v_n$ est convergente, alors la série $\sum u_n$ est convergente.
- Si la série $\sum u_n$ est divergente, alors la série $\sum v_n$ est divergente.

Exemple

On a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{-n}}{1/n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{e^n} = 0$$

et la série $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série (de Riemann) à **termes positifs** convergente.

Donc la série $\sum e^{-n}$ est convergente.

Théorème

Soit $f: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction décroissante, positive et intégrable sur tout intervalle borné $[0, a]$ où $a > 0$ (par exemple si f est continue). Posons

$$I_n = \int_0^n f(x) dx.$$

Alors la série de terme général $u_n = f(n)$ est convergente si et seulement si $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$ est finie.

Exemple : séries de Riemann

Appliquons ce théorème pour montrer que la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.

La série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ peut se réécrire sous la forme $\sum \frac{1}{(1+n)^\alpha}$. On considère l'application $x \mapsto \frac{1}{(1+x)^\alpha}$ qui satisfait les conditions du théorème. On a

$$\int_0^n \frac{1}{(1+x)^\alpha} dx = \begin{cases} \frac{(1+n)^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha} & \text{si } \alpha \neq 1, \\ \ln(1+n) & \text{si } \alpha = 1. \end{cases}$$

On en déduit

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \frac{1}{(1+x)^\alpha} dx = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha \leq 1, \\ \frac{1}{1-\alpha} & \text{si } \alpha > 1. \end{cases}$$

Théorème (Règle de D'Alembert)

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs avec $u_n > 0$ pour n assez grand.
Supposons que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell \in \mathbb{R}.$$

- Si $\ell < 1$, alors la série $\sum u_n$ est convergente.
- Si $\ell > 1$, alors la série $\sum u_n$ est divergente (grossièrement).
- Si $\ell = 1$, on ne peut pas conclure.

Si $\ell = 1$, on ne peut pas conclure, ce qui revient à dire qu'il existe des séries avec $\ell = 1$ et qui sont convergentes et qu'il existe des séries avec $\ell = 1$ et qui sont divergentes.

Exemple

Soit $\sum u_n$ la série de terme général $u_n = \frac{n!}{n^n}$. On a

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)!/(n+1)^{n+1}}{n!/n^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = 1/e < 1\end{aligned}$$

et donc la série $\sum \frac{n!}{n^n}$ converge.

Théorème (Règle de Cauchy)

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. Supposons que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell \in \mathbb{R}.$$

- Si $\ell < 1$, alors la série $\sum u_n$ est convergente.
- Si $\ell > 1$, alors la série $\sum u_n$ est divergente (grossièrement).
- Si $\ell = 1$, on ne peut pas conclure.

Séries à termes positifs : règle de Cauchy

Preuve.

- Supposons $l < 1$. Alors il existe un $\epsilon > 0$ tel que $l < l + \epsilon < 1$. Pour n assez grand

$$-\epsilon \leq \sqrt[n]{u_n} - l \leq \epsilon, \text{ et donc } u_n \leq (l + \epsilon)^n.$$

Comme la série de terme général $(l + \epsilon)^n$ est convergente, on conclut par comparaison que la série $\sum u_n$ est convergente.

- Supposons $l > 1$. Alors il existe un $\epsilon > 0$ tel que $1 + \epsilon < l$. Pour n assez grand

$$-\epsilon \leq \sqrt[n]{u_n} - l \leq \epsilon, \text{ et donc } (l - \epsilon)^n \leq u_n.$$

Comme $l - \epsilon > 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} (l - \epsilon)^n = +\infty$ et par comparaison $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ et donc la série $\sum u_n$ est (grossièrement) divergente. □

Séries à termes positifs : règle de Cauchy

La règle de Cauchy est bien adaptée à l'étude des séries dont le terme général contient des puissances.

Exemple

Soit $\sum u_n$ la série de terme général $u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$. On a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = 1/e < 1$$

et donc la série $\sum \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ converge.

Définition

Une série dont le terme général s'écrit, pour n assez grand, sous la forme $u_n = (-1)^n v_n$ avec $v_n \geq 0$, s'appelle une **série alternée**.

Exemple

La **série harmonique alternée** $\sum \frac{(-1)^n}{n}$.

Exercice

Montrer qu'une série $\sum u_n$ est alternée si et seulement si pour n assez grand $u_n = (-1)^n |u_n|$.

Théorème (Règle des séries alternées)

Soit $\sum (-1)^n v_n$ une série alternée ($v_n \geq 0$). Supposons que

- la suite $(v_n)_n$ est décroissante,
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$.

Alors

- la série $\sum (-1)^n v_n$ est convergente,
- soit S la somme de la série et posons

$$R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = u_{n+1} + u_{n+2} + \dots$$

appelé le **reste d'ordre n** de la série. Alors R_n a le signe de u_{n+1} et

$$|R_n| \leq |u_{n+1}|.$$

Exemple

La série harmonique alternée $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente.