Feuille d'exercices N°11

CONTINUITÉ ET DÉRIVABILITÉ

Exercice 1 — Étudier la continuité des fonctions suivantes sur leur domaine de définition.

1. $f : [0,2] \to \mathbf{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2x-1 & \text{si } 1 < x \leqslant 2. \end{cases}$.
2. $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $f(x) = x + \frac{\sqrt{x^2}}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$.
3. $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $f(x) = x\mathrm{E}(1/x)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$, où E désigne la partie entière.
4. $f : [-2,2] \to \mathbf{R}$ définie par $f(x) = x^2 \sin(\pi/x)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

Exercice 2 — 1. Démontrer que si $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est une fonction continue telle que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, alors f est surjective.

2. Soit $P \in \mathbf{R}[X]$ un polynôme de degré impair. Démontrer que P possède une racine réelle.
3. Donner un exemple de polynôme à coefficients réels et de degré pair qui n'admette aucune racine dans $\mathbf{R}$.

Exercice 3 — Démontrer qu'il existe $x \in \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$ tel que

$$\tan x + \frac{x}{3} = 0.$$

Exercice 4 — Soit f une fonction définie et continue sur le segment $[0,1]$ et telle que

$$\forall x \in [0,1], \quad 0 \leqslant f(x) \leqslant 1.$$

Démontrer qu'il existe au moins un point $x_0 \in [0,1]$ tel que $f(x_0) = x_0$.

Exercice 5 — Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$ et soit f une application de $[a,b]$ dans $[a,b]$.

1. Supposons que l'on ait

$$\forall (x,y) \in [a,b] \times [a,b], \quad |f(x) - f(y)| \leqslant |x-y|.$$

Démontrer que f est continue, puis en déduire qu'il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que $f(x_0) = x_0$.

2. Supposons maintenant que l'on ait

$$\forall (x,y) \in [a,b] \times [a,b], \quad (x \neq y) \Rightarrow (|f(x) - f(y)| < |x-y|).$$

Démontrer qu'il existe un unique $x_0 \in [a,b]$ tel que $f(x_0) = x_0$.

Exercice 6 — 1. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction continue et périodique. Démontrer que f est bornée.

2. En utilisant le résultat précédent, calculer

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x((\sin x)^8 + (\cos x)^{14})}.$$

Exercice 7 — Soit $a \in \mathbf{Z}$. On considère la fonction

$$f : \mathbf{R}^\times \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto x^a \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

1. Pour quelles valeurs de a la fonction f est-elle prolongeable par continuité en 0 ?
2. Lorsqu'il existe, à quelle condition ce prolongement est-il dérivable en 0 ?
3. Dans ce cas, la dérivée de f est-elle continue en 0 ?

Exercice 8 — Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x + \frac{x \ln x}{1-x} & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

1. Démontrer que la fonction f est continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$.
2. La fonction f est-elle dérivable en 0 ? en 1 ?
3. Démontrer qu'il existe $c \in]0,1[$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 9 — Soit $n \geqslant 1$ un nombre entier et soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction n fois dérivable telle que $f^{(n)}$ soit continue. On suppose que f s'annule en $n+1$ points distincts.
Démontrer que f' s'annule au moins n fois, puis que $f^{(n)}$ s'annule au moins une fois.

Exercice 10 — À l'aide du théorème des accroissements finis, démontrer l'inégalité

$$\arctan t > \frac{t}{1+t^2}$$

pour tout nombre réel $t > 0$.

Exercice 11 — À l'aide du théorème des accroissements finis, déterminer

$$\lim_{x \to +\infty} \left((x+1)e^{\frac{1}{1+x}} - xe^{\frac{1}{x}}\right).$$

Exercice 12 — Soit $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ une fonction continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$. Supposons en outre que l'on ait $f(0) = 0$ et $f'(x) \neq 0$ pour tout $x \in [0,1]$. Démontrer que f a un signe constant sur $]0,1[$.

Exercice 13 — Soit $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ une fonction dérivable telle que f' soit continue sur $[0,1]$. Supposons en outre que l'on ait $f(0) = 0$ et $f'(x) > 0$ pour tout $x \in [0,1]$. Démontrer qu'il existe un nombre réel $m > 0$ tel que

$$\forall x \in [0,1], \quad f(x) \geqslant mx.$$