Feuille d'exercices n° 9

ANALYSE ASYMPTOTIQUE

Exercice 1. « Nettoyer » les expressions suivantes :

1. $\ldots =_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x^2}\right) + 3 + \dfrac{1}{x} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
2. $\ldots =_{n\to+\infty} \ \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2^n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{2^n}\right) + \frac{1}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n^2}$.
3. $\ldots =_{x\to 0} \ x + \mathrm{o}(x) + x\ln(x) + \mathrm{o}(x^2 \ln x) + x^2 + \mathrm{o}(x^2)$.
4. $\ldots =_{n\to+\infty} \ \frac{1}{n} + \frac{\ln n}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{\ln n}{n}\right) + \frac{1}{n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{n\ln n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n \ln n}\right)$.
5. $\ldots =_{n\to+\infty} \ n + \mathrm{o}(n) + \sqrt{n} + \mathrm{o}(\sqrt{n}) + \frac{n^2}{\ln n} + n\ln n + \mathrm{o}(n \ln n)$.

Exercice 2.

1. En interprétant les expressions suivantes comme des taux d'accroissement, calculer les limites suivantes lorsque x tend vers 0 :
$$\frac{\sin(x)}{x}, \quad \frac{\tan(x)}{x}, \quad \frac{e^x - 1}{x}, \quad \frac{\mathrm{sh}(x)}{x}, \quad \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} \ (\alpha \in \mathbf{R}^*).$$
2. En exploitant l'identité $\cos(x) = 1 - 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)^2$ pour tout $x \in \mathbf{R}$, calculer
$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2}.$$
3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle qui converge vers 0. Donner des équivalents simples lorsque n tend vers $+\infty$ des suites de terme général :
$$(\sin(u_n)), \quad (\tan(u_n)), \quad (\ln(1+u_n)), \quad (e^{u_n}-1), \quad (\mathrm{sh}(u_n)), \quad (1-\cos(u_n)), \quad ((1+u_n)^\alpha - 1) \ (\alpha \in \mathbf{R}^*).$$

Exercice 3. Donner des équivalents simples lorsque n tend vers $+\infty$ pour les suites de termes général :
$$\text{(a) } u_n = n^{\frac{1}{n}} - 1, \quad \text{(b) } u_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}, \quad \text{(c) } u_n = \ln(n + \sqrt{n^2+1})$$
$$\text{(d) } (n + 3\ln(n))e^{-(n+1)}, \quad \text{(e) } u_n = \frac{n! + e^n}{2^n + 3^n}, \quad \text{(f) } u_n = n\sin\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Exercice 4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie par
$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = 1 + \frac{n}{u_n} \quad \text{pour tout } n \in \mathbf{N}.$$
Établir l'encadrement
$$\sqrt{n} \leqslant u_n \leqslant \sqrt{n} + 1$$
pour tout $n \in \mathbf{N}$, puis en déduire un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 5. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, posons

$$a_n = \sqrt{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} \quad \text{et} \quad b_n = \sqrt{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}}.$$

Déterminer des équivalents simples lorsque n tend vers $+\infty$ des suites (a_n), (b_n) et $(a_n + b_n)$.

Exercice 6. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle à termes positifs.

1. Démontrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes :
   (a) la suite (u_n) ne tend pas vers $+\infty$;
   (b) on peut extraire de (u_n) une sous-suite majorée ;
   (c) on peut extraire de (u_n) une sous-suite convergente.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{|n^2 - u_n|}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Démontrer que cette suite tend vers $+\infty$ avec n.

Exercice 7. Calculer les limites suivantes :

$$\text{(a)} \lim_{x\to+\infty} \frac{2x+5}{3x-4}, \quad \text{(b)} \lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^2-1}, \quad \text{(c)} \lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x^2}\right)$$

$$\text{(d)} \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{1+x}-1}, \quad \text{(e)} \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x+1} - (x+1), \quad \text{(f)} \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x}$$

Exercice 8. Calculer les limites suivantes :

$$\text{(a)} \lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{\sqrt{x}}, \quad \text{(b)} \lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{\sin(3x)}, \quad \text{(c)} \lim_{x\to 0} \frac{x^2\sin(1/x)}{\sin(x)}, \quad \text{(d)} \lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{\cos(\pi x)}{1-2x}$$

$$\text{(e)} \lim_{x\to\frac{1}{2}} (2x^2+x-1)\tan(\pi x), \quad \text{(f)} \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x^2}, \quad \text{(g)} \lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos(3x))}{\ln(\cos(2x))}, \quad \text{(h)} \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\sin(x)^2}$$

$$\text{(i)} \lim_{x\to+\infty} (\ln^x)^2 - \sqrt{x}, \quad \text{(j)} \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+x)}{\ln(x)}, \quad \text{(k)} \lim_{x\to 0} \sqrt{x}\ln(x)^3, \quad \text{(l)} \lim_{x\to+\infty} \frac{\exp(\ln(x)^2)}{x^n}.$$

Exercice 9. Déterminer tous les nombres réels a, b tels que

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{a}{\ln(1+x)} - \frac{b}{e^x-1}\right) = 0.$$

Exercice 10. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction périodique admettant une limite finie en $+\infty$. Que peut-on dire de f ?

Exercice 11. Démontrer que les fonctions suivantes n'ont pas de limite :

1. $x \mapsto \sin(\cos(x))$ en $+\infty$;
2. $x \mapsto \sin\left(x + \frac{1}{x}\right)$ en 0 ;
3. $x \mapsto \frac{x^x}{\lfloor x\rfloor^{\lfloor x\rfloor}}$ en $+\infty$;
4. $x \mapsto \cos\left(e^{1/x^2}\right)$ en 0.